(Testfragen) Prüfen Sie die folgenden Aussagen:

a) Richtig.

b) Falsch. Das Intervall $(a, b]$ ist weder offen noch abgeschlossen.

c) Richtig. Beide Mengen sind beschränkt. Die Menge $\{\pm 1\}$ ist Rand von dem Einheitsintervall. Die Menge $\mathbb{S}^1$ ist Rand von dem Einheitskeis. Rand einer Menge ist immer abgeschlossen.

d) Falsch. $\mathbb{R}$ ist nicht beschränkt.

(G 1) **Fourier-Reihen von ungeraden Funktionen**.
Die Funktion f sei 2π-periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x \le \pi \\ -x & \text{für} \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten von $f(x)$.

(b) Konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig?

(c) Finden Sie mit Hilfe (a) und (b) eine Reihendarstellung von $\frac{\pi^2}{8}$.

Lösung: Es gilt $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \pi, \quad n = 0 \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{für} \quad n \text{ ungerade} \end{cases} \\ b_n &= 0, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Fourier-Reihe $FR(x)$ von f:

$$FR(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \cdots] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x$$

Wegen

$$\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x \le \frac{1}{(2k+1)^2}$$

konvergiert $FR(x)$ nach Satz 25.2 gleichmäßig.
Es ist offensichtlich dass f an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist. Nach dem Satz 28.1 erhalten wir:

$$0 = f(x_0) = FR(x_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Wir erhalten

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

als eine gewünschte Reihendarstellung von $\frac{\pi^2}{8}$.

(G 2) **Fourier-Reihen einer ungeraden Funktion mit Sprungstellen**.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{für} \quad 0 < x < \pi \\ -\cos x & \text{für} \quad -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie $f(x)$ auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Machen Sie sich klar (graphisch oder rechnerisch), dass f eine ungerade Funktion ist.

(c) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten von f.

(d) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe von f.

Lösung: Da f undgerade ist, sind die Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos x \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \text{ ungerade} \\ \frac{4n}{\pi(n-1)(n+1)} & \text{für} \quad n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe lautet:

$$FR(x) = \frac{4}{\pi}(\frac{2 \sin 2x}{1 \cdot 3} + \frac{4 \sin 4x}{3 \cdot 5} + \frac{6 \sin 6x}{5 \cdot 7} + \cdots)$$

Nach dem Satz 28.1 konvergiert die Fourier-Reihe $FR(x)$ für $x_0 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ gegen

$$\frac{1}{2} = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

und für alle stetigen Stellen $x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ gegen

$$f(x) = \frac{4}{\pi}(\frac{2 \sin 2x}{1 \cdot 3} + \frac{4 \sin 4x}{3 \cdot 5} + \frac{6 \sin 6x}{5 \cdot 7} + \cdots)$$

(G 3) **Funktionen mehrerer Veränderlichen.**
Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{y}$ mit dem Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) | y = 0\}$.

(a) Skizzieren Sie die Höhenlinien von f. Bestimmen Sie die Schnitte von f mit der y-z-Ebene und der Ebene $y = 1$.

(b) Ist f stetig auf $D(f)$? Lässt sich f auf $\mathbb{R}^2$ stetig fortsetzen?

Lösung:
Es ist offensichtlich dass f auf $D(f)$ stetig ist. Jedoch lässt sich f nicht auf ganz $\mathbb{R}^2$ fortsetzen. Wähle z.B Folgen (y_k) mit $\lim_{k\to\infty} y_k = 0$ und (x_k) mit $x_k = \sqrt{y_k}$. Es ist $\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = 1$. Andererseits für $x_k = y_k$ erhalten wir $\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = 0$.