(Testfragen) Prüfen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die leere Menge $\emptyset$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen.

b) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann ist das Intervall $(a, b]$ abgeschlossen.

c) Die Punktmengen $\{\pm 1\}$ sowie der Einheitskreis $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ sind kompakt.

d) Die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$ ist kompakt.

(G 1) **Fourier-Reihen von ungeraden Funktionen**.
Die Funktion f sei 2π-periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ -x & \text{für} \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten von $f(x)$.

(b) Konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig?

(c) Finden Sie mit Hilfe von (a) und (b) eine Reihendarstellung von $\frac{\pi^2}{8}$.

(G 2) **Fourier-Reihen einer ungeraden Funktion mit Sprungstellen**.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{für} \quad 0 < x < \pi \\ -\cos x & \text{für} \quad -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie $f(x)$ auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Machen Sie sich klar (graphisch oder rechnerisch), dass f eine ungerade Funktion ist.

(c) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten von f.

(d) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe von f.

(G 3) **Funktionen mehrerer Veränderlichen.**
Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{y}$ mit dem Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) | y = 0\}$.

(a) Skizzieren Sie die Höhenlinien von f. Bestimmen Sie die Schnitte des Graphen von f mit der y-z-Ebene und der Ebene $y = 1$.

(b) Ist f stetig auf $D(f)$? Lässt sich f auf $\mathbb{R}^2$ stetig fortsetzen?

(H 1) **Fourier-Reihen**

Gegeben sei $f(x+2\pi) = f(x)$ und $f(x) = x^2$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Skizzieren Sie $f(x)$ auf $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten von $f(x)$.

(c) Finden Sie mit Hilfe (b) eine Reihedarstellung von $\frac{\pi^2}{12}$.

(H 2) **Definitionen aus der Analysis**
Skizzieren Sie die Mengen und untersuchen Sie, ob sie offen/abgeschlossen/beschränkt/kompakt sind.

(a) $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| < 1, |x-1| < 2\}$

(b) $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 1, (x-1)^2 + y^2 < 4\}$

(c) $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sin x, x \in [0,\pi]\}$

(H 3) **Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlichen**
Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} y + x\cos(\frac{1}{y}) & \text{für} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad y = 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie f und g auf Stetigkeit in ihren Definitionsbereichen.