(H 1) **Konvergenz von Potenzreihen**

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}(x-1)^{5k} \qquad \text{(ii)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Lösung:

1. Mit $z = (x-5)^5$ schreibt sich die gegebene Reihe als $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} z^k$.
   Wir bestimmen zunächst den Konvergenzradius dieser Reihe: Wegen
   $$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{k^2}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[k]{k})^2} = \frac{2}{1^2} = 2$$
   ist dieser $\frac{1}{2}$ nach dem Wurzelkriterium. Also konvergiert die ursprüngliche Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit
   $$|x-1|^5 = |z| < \tfrac{1}{2}, \quad \text{d.h.} \quad |x-1| < \tfrac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$
   Der Konvergenzradius ist damit $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$.
2. Es ist
   $$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(-1)^k}{2k} \cdot \frac{2k+1}{(-1)^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k} = 1.$$
   Der Konvergenzradius ist also 1 nach dem Quotientenkriterium.

(H 2) **Die Taylor-Entwicklung**.

Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung um $x = 0$ für die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ anhand Tayloreihe.

Lösung: Es ist ausreichend, die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ auf $I := (-1, 1)$ zu betrachten. Es gilt nach dem Satz 27.1

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

Für $x_0 = 0$ erhalten wir für die Taylor-Koeffizienten

$$a_0 = 0, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad k = 1, 2, ...$$

Also

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + R_n(x,0)$$

mit

Darstellung von Lagrange $\quad R_n(x,0) = \dfrac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n+1}\left(\dfrac{x}{1+\vartheta x}\right)^{n+1}, \quad 0 < \vartheta < 1$

Darstellung von Cauchy $\quad R_n(x,0) = \dfrac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n)!}(1-\vartheta)^n x^{n+1} = (-1)^n (1-\vartheta)^n \left(\dfrac{x}{1+\vartheta x}\right)^{n+1}, \quad 0 < \vartheta < 1$

Betrachten wir nun die Darstellung von Lagrange, es gilt für $x \in I,\ x \neq 0$ die Abschätzung:

$$|R_n(x,0)| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{|x|}{|1+\vartheta x|}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{|x|}{1-|\vartheta x|}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\frac{1}{|x|}-\vartheta}\right)^{n+1}$$

Der Grenzwert diese Darstellung ist also

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0$$

Nach dem Satz 27.2 gilt:

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k \quad \text{für } x \in I$$

(H 3) **Taylorreihen**. Berechnen Sie unter Verwendung von Taylorreihen die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{(\sin(x))^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^4}-1}{(1-\cos(x))^2}.$$

Lösung: Unter Verwendung der bekannten Taylorreihen für $\sin(x)$, $\cos(x)$ und e^x erhält man

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{(\sin(x))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+\ldots-1}{(x-\frac{1}{3!}x^3+\ldots)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+\ldots}{x^2+\ldots} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^4}-1}{(1-\cos(x))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x^4+\frac{1}{2!}x^8+\ldots-1}{(1-1+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+\ldots)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+\ldots}{\frac{1}{4}x^4+\ldots} = 4.$$