(Testfragen) Prüfen Sie die folgenden Aussagen:

a) 0, 1, $1+x$, $ax^{500}+bx^{999}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ sind Potenzreihen.

b) Der Konvergenzradius ρ einer Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ist eindeutig bestimmt und für $|x| = \rho$ konvergiert die Potenzreihe.

c) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ hat den Konvergenzradius 0.

d) Die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = x^2$ um $x_0 = 1$ lautet: $1 + 2(x-1) + (x-1)^2$.

Lösung:

a) richtig.

b) falsch. Beispiel: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hat Konvergenzradius 1, aber divergiert für $x = \pm 1$.

c) richtig.

d) richtig.

(G 1) Konvergenz von Potenzreihen.
Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k + \sin(k))(x-2)^k \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$$

Lösung:

1. Es ist $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{k+\sin(k)}{k+1+\sin(k+1)}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1+\frac{\sin(k)}{k}}{1+\frac{1}{k}+\frac{\sin(k+1)}{k}}\right|$.

$$\text{Da } -\tfrac{1}{k} \le \tfrac{\sin(k)}{k} \le \tfrac{1}{k}, \text{ gilt } \lim_{k\to\infty} \frac{\sin(k+1)}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin(k)}{k} = 0,$$
$$\text{und damit } \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{1+0}{1+0+0} = 1.$$

Also ist der Konvergenzradius nach dem Quotientenkriterium 1.

2. Es ist

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \cdot \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)\cdot 2}{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{4k+2}{k+1} = 4.$$

Also ist der Konvergenzradius nach dem Quotientenkriterium 4.

(G 2) Gliederweise Differentiation von Potenzreihen.
Bestimme den Konvergenzradius und für alle x im Konvergenzbereich den Wert der Potenzreihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^k.$$

Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^k &= x^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = x^2 \sum_{k=2}^{\infty} \left(x^k\right)'' \\
&= x^2 \left(\sum_{k=2}^{\infty} x^k \right)'' \qquad \text{für alle} \quad |x| < 1 \quad \text{nach Satz 26.3} \\
&= x^2 \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x \right)'' = x^2 \left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1 \right)' = x^2 \frac{2}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

Also hat die Potenzreihe Konvergenzradius 1 nach Satz 26.3 und es gilt

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^k = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

(G3) Gliederweise Integration von Potenzreihen.
Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung um $x = 0$ für die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ ohne die Taylorentwicklung zu benutzen.

Lösung: Mit der geometrischen Reihe gilt für alle $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-(-t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^k\,\mathrm{d}t \qquad\qquad (\text{Satz 26.3}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}(-t)^{k+1}(-1)\Big|_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+2} \frac{1}{k+1} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} x^k.
\end{aligned}$$