(Testfragen) Prüfen Sie die folgenden Aussagen:

a) 0, 1, $1 + x$, $ax^{500} + bx^{999}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ sind Potenzreihen.

b) Der Konvergenzradius ρ einer Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ist eindeutig bestimmt und für $|x| = \rho$ konvergiert die Potenzreihe.

c) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ hat den Konvergenzradius 0.

d) Die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = x^2$ um $x_0 = 1$ lautet: $1 + 2(x-1) + (x-1)^2$.

(G 1) **Konvergenz von Potenzreihen**.
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

$$\text{(i)} \sum_{k=0}^{\infty} (k + \sin(k))(x-2)^k \qquad \text{(ii)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$$

(G 2) **Gliederweise Differentiation von Potenzreihen**.
Bestimmen Sie den Konvergenzradius und für alle x im Konvergenzbereich den Wert der Potenzreihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^k.$$

(G 3) **Gliedweise Integration von Potenzreihen**.
Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung um $x = 0$ für die Funktion $f(x) = \ln(1 + x)$ ohne die Taylorentwicklung zu benutzen.

Hinweis: Es gilt $ln(1 + x) = \int \frac{1}{1+x} dx$ und $\frac{1}{1+x}$ stellt die Grenzwert der geometrischen Reihe für geeignete x dar.

(H 1) **Konvergenz von Potenzreihen**

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}(x-1)^{5k} \qquad \text{(ii)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

(H 2) **Die Taylor-Entwicklung**.
Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung um $x = 0$ für die Funktion $f(x) = \ln(1 + x)$ anhand Tayloreihe.

(H 3) **Taylorreihen**. Berechnen Sie unter Verwendung von Taylorreihen die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{(\sin(x))^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^4}-1}{(1-\cos(x))^2}.$$