(H 1) **Konvergenz von Funktionenreihen**

Untersuchen Sie die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(2+\cos x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Lösung:
Wegen

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall \in \mathbb{R}$$

ist

$$e^{-3n} = e^{-n(2+1)} \leq e^{-n(2+\cos x)} \leq e^{-n(2-1)} = e^{-n}$$

Setze $c_n := e^{-n}$, es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(2+\cos x)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

Da aber $0 < e^{-1} < 1$, ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}(e^{-1})^n$ eine geometrische Reihe, welche konvergiert. Nach Satz 25.2 konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(2+\cos x)}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, und somit konvergiert sie auch punktweise auf $\mathbb{R}$.

(H 2) **Konvergenz von Funktionenfolgen und Differentiation**

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f_n) = [0, \infty)$ durch die Zuordnungsvorschrift

$$f_n(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{nx+1}{n^2 e^{nx}}$$

erklärt.

(a) Gegen welche Grenzfunktion f konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise?

(b) Bestimmen Sie die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ und untersuchen Sie, ob $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

(c) Zeigen Sie, daß

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

für alle $x \in [0, \infty)$.

Lösung:

(a) Nach Definition 18.2 (i) auf S.199 in der ersten Auflage des Arbeitsbuchs ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, \infty)$ genau dann punktweise konvergent, wenn für alle $x \in [0, \infty)$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Sollte $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, \infty)$ punktweise konvergent sein, so bildet die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [0, \infty)$ und

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

die Grenzfunktion der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sei nun $x \in [0, \infty)$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}x^2 - \frac{nx+1}{n^2 e^{nx}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}x^2 - \lim_{n\to\infty} \frac{nx+1}{n^2 e^{nx}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \lim_{n\to\infty} \frac{x+\frac{1}{n}}{ne^{nx}} \\ &= \frac{1}{2}x^2 =: f(x).\end{aligned}$$

Damit haben wir nun gezeigt, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, \infty)$ *punktweise* gegen die Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [0, \infty)$ und

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

konvergiert.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Dann ist

$$f_n'(x) = x + \frac{x}{e^{nx}}$$

und somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} x + \frac{x}{e^{nx}} = x.$$

Wir können daher vermuten, daß die Funktionenfolge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, \infty)$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(g) = [0, \infty)$ und

$$g(x) = x$$

konvergiert. Um diese Behauptung zu beweisen, können wir auf Satz 18.1 auf S.202 a.a.O. zurückgreifen, der besagt, daß $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann auf $[0, \infty)$ gleichmäßig gegen g konvergiert, wenn die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n'(x) - g(x)| \right] = 0$$

erfüllt ist.

Es sei nun $n \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben. Wegen

$$|f_n'(x) - g(x)| = \left| x + \frac{x}{e^{nx}} - x \right| = \left| \frac{x}{e^{nx}} \right| = \frac{x}{e^{nx}}$$

betrachten wir zunächst die Abbildung $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(h_n) = \mathbb{R}$ und

$$h_n(x) = \frac{x}{e^{nx}}.$$

Diese besitzt die Ableitungen

$$h_n'(x) = \frac{e^{nx} - nxe^{nx}}{(e^{nx})^2} = \frac{1 - nx}{e^{nx}}$$

und
$$h_n''(x) = \frac{-ne^{nx} - (1-nx)ne^{nx}}{(e^{nx})^2} = \frac{n(-2+nx)}{e^{nx}}.$$
Da
$$h_n'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{1}{n}$$
und
$$h_n''\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{n}{e} < 0$$
besitzt h_n nach Satz 11.4 auf S.133 a.a.O. an der Stelle $x = \frac{1}{n}$ ein lokales Maximum, welches (da es das einzige lokale Maximum ist) zugleich auch das globale Maximum von h_n darstellt. Aufgrund dieser Überlegung läßt sich nun
$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n'(x) - g(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} h_n(x) = h_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{e^{n\frac{1}{n}}} = \frac{1}{ne}$$
und somit
$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n'(x) - g(x)|\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ne} = 0$$
folgern. Damit ist die Funktionenfolge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,\infty)$ *gleichmäßig konvergent* gegen die Grenzfunktion g.

(c) Mit Satz 18.5 (i) auf S.205 a.a.O. erhalten wir unter Berücksichtigung der Ergebnisse der vorangegangenen Aufgabenteile
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = x = g(x).$$

■

(H 3) **Kriterien für gleichmäßige Konvergenz** Gegegeben sei eine Funktionenfolge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Definitionsbereich $D = [-a, a]$, $a \in \mathbb{R}^+$

(a) Für welche a ist $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D gleichmäßig konvergent?

(b) Ist die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ für dieses a auf D gleichmäßig konvergent?

Lösung:

(a) Nach Satz 25.1 ist die Funktionenfolge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gleichmäßig konvergent gegen f, wenn
$$\lim_{n\to\infty} (\sup_{x\in D} |x^n - f(x)|) = 0$$
Es gilt wegen Dreieckungleichung:
$$\lim_{n\to\infty} (\sup_{x\in D}(\big||x^n| - |f(x)|\big|)) \leq \lim_{n\to\infty} (\sup_{x\in D} |x^n - f(x)|) = 0$$
Daraus folgt
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |x^n| - \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f(x)| = 0$$
d.h
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |x^n| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f(x)|$$

Andererseits zieht die gleichmäßige Konvergenz die punktweise Konvergenz stets nach sich, also muss $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvengieren. Aber $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nur für $-1 < a < 1$ mit der Grenzfunktion $f(x) \equiv 0$. Wir erhalten nun:

$$\sup_{x\in[-a,a]} |x^n - f(x)| = \sup_{x\in[-a,a]} |x^n - 0| = a^n$$

Wegen $-1 < a < 1$ ist $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. Dies liefert uns nach 25.1 die gleichmäßige Konvergenz.

(b) Ja, denn es gilt:

$$|x^n| \leq a^n \quad \forall x \in D, n \in \mathbb{N}$$

Mit a^n erhalten wir eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$$

Satz 25.2 liefert die gleichmäßige Konvergenz.