(H 1) **Konvergenz von Funktionenreihen**

Untersuchen Sie die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(2+\cos x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(H 2) **Konvergenz von Funktionenfolgen und Differentiation**

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f_n) = [0, \infty)$ durch die Zuordnungsvorschrift

$$f_n(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{nx+1}{n^2 e^{nx}}$$

erklärt.

(a) Gegen welche Grenzfunktion f konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise?

(b) Bestimmen Sie die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ und untersuchen Sie, ob $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

(c) Zeigen Sie, daß
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$
für alle $x \in [0, \infty)$.

(H 3) **Kriterien für gleichmäßige Konvergenz** Gegegeben sei eine Funktionenfolge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Definitionsbereich $D = [-a, a]$, $a \in \mathbb{R}_+$

(a) Für welche a ist $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D gleichmäßig konvergent?

(b) Für welche a ist die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ auf D gleichmäßig konvergent?