(Testfragen) Gegeben sei eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Definitionsbereich D. Prüfen Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D gleichmäßig konvergent, so ist sie auf D punktweise konvergent.

b) Die Aussage a) gilt in umgekehrter Richtung.

c) Wenn die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf ihrem Definitionsbereich D punktweise konvergiert, dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch punktweise auf D.

d) Die Aussage c) gilt in umgekehrter Richtung.

(G 1) Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz.
Untersuche die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n = \sqrt[n]{n^2x^3}, \quad x \in [0,2];$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}, \quad x \in [0,1];$

(c) $g_n = \sin\dfrac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Hinweis zu a): Beachte dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(G 2) Vertauschung von Limes und Integral.
Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_n = \frac{2x}{n}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}}, \quad x \in [0,1].$$

(a) Untersuchen Sie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(b) Bestimmen Sie

$$I_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad I_2 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

und vergleiche die Ergebnisse. Gibt es dafür eine theoretische Erklärung?

(G 3) Gleichmäßige Konvergenz und Ableitung.
Wir betrachten die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ mit } f_n(x) = nx^{n-1}.$$

Zeige, dass für alle $x \in (-1,1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Hinweis: Bestimme eine Stammfunktion von f_n.

Für die am Do., den 25.5. ausfallenden Übungen gibt es folgende Ersatztermine:
Fr. den 26.05.2006, 14.25 - 16.05
in den Räumen S103/25, S103/107, S103/112, S103/113 und S103/116