(H 1) Eigenwerte und Eigenvektoren
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Eigenwerte von A an, wobei der Eigenwert $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$ als bekannt vorausgesetzt wird.
Lösung:
Nach Satz 13.4 im Buch ist $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$ ein weiterer Eigenwert, da $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$.
Bestimme die Spur von A:

$$Sp(A) = 1 + 0 - 1 = 0.$$

Wegen $Sp(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ erhalten wir:

$$0 = Sp(A) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} + (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}) + \lambda_3 = -1 + \lambda_3.$$

Somit ist $\lambda_3 = 1$ der noch fehlende Eigenwert. □

(H 2) Eigenwerte und Eigenvektoren

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -11 & 15 & -16 \\ -7 & 11 & -12 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix B.
Lösung:
Das charakteristische Polynom von B lautet:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= Det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -11 & 15-\lambda & -16 \\ -7 & 11 & -12-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda(15-\lambda)(12+\lambda) + 112 + 121 - 7(15-\lambda) - 176\lambda - 11(12+\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt: $\lambda_1 = -1$ *und* $\lambda_{2,3} = 2$.
Wir berechnen die zugehörigen Eigenvektoren.
Zunächst zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$:

$$(B - \lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -11 & 16 & -16 \\ -7 & 11 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Damit:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -11 & 16 & -16 & 0 \\ -7 & 11 & -11 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 27 & -27 & 0 \\ 0 & 18 & -18 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wähle $v_3 = 1$, dann gilt $v_2 = v_3 = 1$ und $v_1 = -v_2 + v_3 = 0$, somit erhalten wir

$$v = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Mit dem Eigenwert $\lambda_{2,3} = 2$ verfahren wir entsprechend. Es ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & 0 \\ -11 & 13 & -16 & 0 \\ -7 & 11 & -14 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & 21 & 0 \\ 0 & -15 & 21 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wähle $v_2 = 7$, dann gilt $v_3 = 5$ und $-2v_1 = -v_2 + v_3 = -7 + 5 = -2$, somit erhalten wir

$$v = s \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Der Eigenraum zum zweifachen Eigenwert $\lambda_{2,3}$ ist 1-dimensional.

(H 3) Zeigen Sie: Ist λ Eigenwert von A, dann ist λ^k Eigenwert von A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.
Lösung: Sei λ Eigenwert von A und x ein zugehöriger Eigenvektor, d.h. $Ax = \lambda x$.
Wir zeigen:

$$A^k x = \lambda^k x \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}$$

mittels vollständiger Induktion (dann ist λ^k Eigenwert von A^k mit Eigenvektor x).
Induktionsanfang, $k = 1$: Es gilt $Ax = \lambda x$ (s.o.).
Induktionsannahme für $k \in \mathbb{N}$: Es gelte $A^k x = \lambda^k x$.
Induktionsschritt:

$$A^{k+1}x = AA^k x = A\lambda^k x = \lambda^k Ax = \lambda^k \lambda x = \lambda^{k+1} x$$

(H 4) Welche der folgenden Matrizen sind

1. positiv definit,
2. negativ definit,
3. indefinit,
4. nichts davon?

Begründen Sie jeweils und geben Sie im indefiniten Fall Vektoren an, die Ihre Behauptung belegen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Nach dem Hauptminorenkriterium ist A_2 positiv definit. A_3 ist indefinit, denn es ist $e_1^T A_3 e_1 = 4 > 1$, aber mit $x = e_1 - e_2$ ist $x^T A_3 x = -1 < 0$. Auch A_5 ist indefinit, denn $e_1^T A_5 e_1 = -4 < 0$, aber $e_2^T A_5 e_2 = 1 > 0$. Analog ist $e_3^T A_7 e_3 = 1 > 0$, aber $e_1^T A_7 e_1 = -2 < 0$.
Die übrigen Matrizen sind ¨ nichts davon ¨, nämlich A_1 und A_6 positiv semidefinit (denn ein Eigenwert ist jeweils Null, der bzw. die anderen positiv), sowie A_4 und A_8 negativ definit (jeweils ein Eigenwert ist Null, der bzw. die anderen negativ).