(Testfragen) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, prüfen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Zahl 0 kann ein Eigenwert von A sein.

b) Der Nullvektor kann ein Eigenvektor von A sein.

c) Jedes Polynom von Grad n besitzt in $\mathbb{C}$ genau n (nicht notwendig verschiedene) Nullstellen.

d) Die Matrix A hat $n+1$ Eigenwerte.

Lösung:

a) Richtig.

b) Falsch, Nach Definition von Eigenvektor kann der Nullvektor nicht Eigenvektor von A sein.

c) Richtig nach dem Fundamentalsatz der Algebra.

d) Falsch, weil c richtig ist.

(G 1) Eigenwertproblem
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

c) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A.

Lösung:
Das charakteristische Polynom von A lautet:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)\big((3-\lambda)(-\lambda)+2\big) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) \\ &= (3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2). \end{aligned}$$

Die Lösung der Gleichung $p_A(\lambda) = 0$ hat $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ als Lösungen.
Der zu λ_1 gehörige Eigenvektor ist die nichttriviale Lösung des Gleichungsystems:

$$(A - \lambda_1 I)x = 0$$

also man löst dieses Gleichungsystem und erhält den Eigenvektor $v_1 = \mu(1,0,0)^T$ mit $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Analog erhält man $v_2 = \mu(0,-1,1)^T$ und $v_3 = \mu(-2,-1,0)^T$ mit $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(G 2) Eigenwerte, Determinante, Spur.
Sei A eine 2×2 reelle Matrix mit $\mathrm{Spur}(A) = 2$ und $\det(A) = 10$.
Bestimmen Sie die Eigenwerte λ von A.

Lösung Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. eine reelle Matrix. Das charakteristsiche Polynom von A ist:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = (-1)^2 \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2 - \mathrm{Spur}(A) + \det(A) \end{aligned}$$

Mit pq-Formel erhält man die Nullstellen:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}A \pm \sqrt{(\mathrm{Spur}A)^2 - 4\det A})$$

also $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$.

(G 3) Drehung in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$
Gegeben sei $0 \leq \alpha < 2\pi$ und eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie die Vektoren $A(e_1)$ und $A(e_2)$, wobei $e_1 = (1,0)^T, e_2 = (0,1)^T$ sind.

(b) Sei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $x \neq 0$. Berechnen Sie die Länge von $A(x)$ und die Winkel zwischen x und $A(x)$.

(c) Berechnen Sie Eigenwerte von A und $\det(A)$.

Lösung: Das Bild

$$\begin{aligned} A(x) &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)x_1 - \sin(\alpha)x_2 \\ \sin(\alpha)x_1 + \cos(\alpha)x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Durch direkte Rechnung erhalten wir:

$$||A(x)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = ||x||$$

Sei $0 \leq \gamma < \pi$ die Winkel zwischen $A(x)$ und x, es gilt:

$$\begin{aligned} \cos(\gamma) &= \frac{< x, A(x) >}{||x|| \cdot ||A(x)||} \\ &= \frac{\cos(\alpha)x_1^2 - \sin(\alpha)x_1x_2 + x_2x_1\sin(\alpha) + \cos(\alpha)x_2^2}{||x|| \cdot ||A(x)||} \\ &= \cos(\alpha) \cdot \frac{||x||}{||A(x)||} \\ &= \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Es folgt: $\alpha = \gamma$ falls $0 \leq \alpha \leq \pi$ oder $\alpha = 2\pi - \gamma$ falls $\pi < \alpha < 2\pi$
Das charakteristische Polynom von A ist:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (-1)^2 \det \begin{pmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 + 1 - 2\cos(\alpha)\lambda \end{aligned}$$

Wir erhlaten $\lambda_{1,2} = \cos(\alpha) \pm i \sin(\alpha)$

(G4)**Quadratische Formen**
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die zu A gehörige quadratische Form $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Welche Voraussetzung müssen Sie erheben, damit Q_A überhaupt sinnvoll erklärt ist?

(b) Wählen Sie nun $b = 2$ und entscheiden Sie, für welche Werte der reellen Parameter a und c die Matrix A positiv definit ist.

(c) Zeigen Sie, daß A nicht negativ definit sein kann.

(d) Geben Sie geeignete Werte für die Parameter a, b und c an, so daß A indefinit ist.

Lösung: **Quadratische Formen**

(a) Nach der Definition sind quadratische Formen mit *symmetrischen Matrizen* assoziiert. Aus diesem Grund müssen wir zunächst

$$c = 3$$

voraussetzen. Zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 3 \\ b & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

gehört dann die *quadratische Form* $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift

$$Q_A(x) = ax_1^2 + 8x_2^2 + 6x_3^2 + 2bx_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

(b) Wir setzen $b = 2$ und betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dabei wurde bereits berücksichtigt, daß hier erneut $c = 3$ gewählt werden muß, da eine Matrix nach Definition höchstens dann positiv oder negativ definit sein kann, wenn sie symmetrisch ist. Aufgrund von Satz 13.11 auf S152 im Buch ist nun A genau dann positiv definit, wenn die führenden Hauptunterdeterminanten (*Hauptminoren*) von A positiv sind. Wegen

$$\begin{aligned} D_1 &= \det(a) = a \overset{!}{>} 0 && \Leftrightarrow \quad a > 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} \mathrm{a} & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8a - 4 \overset{!}{>} 0 && \Leftrightarrow \quad a > \frac{1}{2} \\ D_3 &= \begin{vmatrix} \mathrm{a} & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 32a - 48 \overset{!}{>} 0 && \Leftrightarrow \quad a > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ist A für alle $a > \frac{3}{2}$ *positiv definit*.

(c) Um die Symmetrie der Matrix zu gewährleisten, müssen wir zuerst wieder $c = 3$ fordern. Nach Definition ist die Matrix A negativ definit, wenn die Matrix

$$-A = \begin{pmatrix} -a & -b & -3 \\ -b & -8 & -4 \\ -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist, was nach Satz 13.11 auf S.152 genau dann der Fall ist, wenn alle Hauptunterdeterminanten von $-A$ positiv sind. Nun gilt aber

$$D_1 = \det(-a) = -a \overset{!}{>} 0 \qquad \Leftrightarrow \quad a < 0$$

und

$$D_2 = \begin{vmatrix} -a & -b \\ -b & -8 \end{vmatrix} = 8a - b^2 \overset{!}{>} 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 < 8a,$$

weshalb die Ungleichung

$$b^2 < 0$$

folgt, die für kein $b \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Somit können die Parameter a, b und c *nicht* so gewählt werden, daß A negativ definit ist.

(d) Wir setzen

$$a = 1,\ b = 6 \qquad \text{und} \qquad c = 3$$

und betrachten die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

deren zugehörige quadratische Form $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch die Zuordnungsvorschrift

$$Q_A(x) = x_1^2 + 8x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$$

erklärt ist. Für $x = (1, 0, 0)^T$ ist dann

$$Q_A(x) = 1 > 0$$

und für $x = (1, -\frac{1}{2}, 0)^T$ folgt

$$Q_A(x) = -3 < 0$$

und somit ist A nach Definition 13.6 für diese Parameterwahl *indefinit*.