(Testfragen) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, prüfen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Zahl 0 kann ein Eigenwert von A sein.

b) Der Nullvektor kann ein Eigenvektor von A sein.

c) Jedes Polynom von Grad n besitzt in $\mathbb{C}$ genau n (nicht notwendig verschiedene) Nullstellen.

d) Die Matrix A hat $n+1$ Eigenwerte.

(G 1) Eigenwertproblem
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

c) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A.

(G 2) Eigenwerte, Determinante, Spur.
Sei A eine 2×2 reelle Matrix mit $\mathrm{Spur}(A) = 2$ und $\det(A) = 10$.
Bestimmen Sie die Eigenwerte λ von A.

(G 3) Drehung in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$
Gegeben sei $0 \le \alpha < 2\pi$ und eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie die Vektoren $A(e_1)$ und $A(e_2)$, wobei $e_1 = (1,0)^T, e_2 = (0,1)^T$ sind.

(b) Sei $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$. Berechnen Sie die Länge von $A(x)$ und die Winkel zwischen x und $A(x)$.

(c) Berechnen Sie Eigenwerte von A und $\det(A)$.

(G4)**Quadratische Formen**
h Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die zu A gehörige quadratische Form $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Welche Voraussetzung müssen Sie erheben, damit Q_A überhaupt sinnvoll erklärt ist?

(b) Wählen Sie nun $b = 2$ und entscheiden Sie, für welche Werte der reellen Parameter a und c die Matrix A positiv definit ist.

(c) Zeigen Sie, daß A nicht negativ definit sein kann.

(d) Geben Sie geeignete Werte für die Parameter a, b und c an, so daß A indefinit ist.

(H 1) Eigenwerte und Eigenvektoren
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Eigenwerte von A an, wobei der Eigenwert $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$ als bekannt vorausgesetzt wird.

(H 2) Eigenwerte und Eigenvektoren

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -11 & 15 & -16 \\ -7 & 11 & -12 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix B.

(H 3) Zeigen Sie: Ist λ Eigenwert von A, dann ist λ^k Eigenwert von A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

(H 4) Welche der folgenden Matrizen sind

1. positiv definit,
2. negativ definit,
3. indefinit,
4. nichts davon?

Begründen Sie jeweils und geben Sie im indefiniten Fall Vektoren an, die Ihre Behauptung belegen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$