(Testfragen)

a) Nur (2) ist richtig.

b) richtig

c) falsch

d) falsch (Es kann auch gar keine Lösung geben.)

(G 1) Matrizen

a) Es geht nur

$$A + C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

die anderen Summen gibt es nicht, da die Matrizen unterschiedliche Formate haben.

b) Es geht

$$A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 10 \\ 10 & 9 & 10 \\ 10 & 10 & 14 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 16 & 10 & 11 & 13 \\ 13 & 7 & 8 & 11 \\ 12 & 10 & 9 & 11 \end{pmatrix} \quad B^T A = \begin{pmatrix} 16 & 13 & 12 \\ 10 & 7 & 10 \\ 11 & 8 & 9 \\ 13 & 11 & 11 \end{pmatrix},$$

die anderen Produkte gibt es nicht.
Hinweis: Es ist $B^T A = B^T A^T = (AB)^T$. Das liegt an $A^T = A$.

c) Für die Summe braucht man $n^2$ Additionen und keine Multiplikation und für das Produkt braucht man $n^2(n-1) = n^3 - n^2$ Additionen und $n^2 n = n^3$ Multiplikationen.

(G 2) Determinanten
Es ist $\det A = 8$, $\det C = -9$, $\det(A+C) = -14$ und $\det(AC) = \det A \det C = -72$. Hinweis: Beachte $\det(A+C) \neq \det A + \det C$.
Alle diese Matrizen sind regulär, denn die Determinante ist ungleich null.

(G 3) Gleichungssysteme
Die Lösungen lauten $x = (4,3,2,1) + \lambda(-2,-1,2,1)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(G 4) Inverse Matrix und Gleichungssysteme
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Man berechnet die adjunkte Matrix

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und daraus die inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{adj} = -A_{adj} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

b) $Ax = b$ ist äquivalent zu $x = A^{-1}b$, damit ist $x = A^{-1}(1,2,1)^T = (2,-3,0)^T$, $x = A^{-1}(3,1,2)^T = (3,-3,-1)^T$ und $x = A^{-1}(2,4,-1)^T = (10,-18,-3)^T$.

(H 1) Determinante einer Matrix

a) Es ist $\det(A) = a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2)$.

b) Es ist $\det(A) = 0$ genau für $a = 1$ oder $a = 2$.
Falls $a \neq 1$ und $a \neq 2$: Der Rang ist 3, Kern ist $\{0\}$ und das Bild ist $\mathbb{R}^3$.
Falls $a = 1$: Der Rang ist 2, der Kern wird von $(-2,1,0)^T$ aufgespannt und das Bild von $(1,1,1)^T$ und $(2,1,2)^T$.
Falls $a = 2$: Der Rang ist 2, der Kern wird von $(-3,1,1)$ aufgespannt und das Bild von $(1,1,1)^T$ und $(1,2,2)^T$.

(H 2) Potenzen von Matrizen

a) Es ist

$$A^2 = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A^3 = 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = 16\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Allgemein ist $A^{4n+k} = 2^{4n}A^k$, wobei $k = 0,1,2,3$.

(H 3) Die Spur einer Matrix

a) Es ist

$$\mathrm{spur}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{spur}(A) + \mathrm{spur}(B) \quad \text{und}$$

$$\mathrm{spur}(tA) = \sum_{i=1}^{n}(ta_{ii}) = t\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = t\,\mathrm{spur}(A) .$$

b) Die Einträge der Matrix $AB$ sind von der Form $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ und damit ist

$$\mathrm{spur}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \mathrm{spur}(BA) .$$

c) Wegen b) ist $\mathrm{spur}(B) = \mathrm{spur}(C^{-1}AC) = \mathrm{spur}(C^{-1}CA) = \mathrm{spur}(A)$.