(Testfragen)

a) Eine $n \times m$-Matrix hat: (1) $n+m$ Einträge, (2) nm Einträge, (3) n^2+m^2 Einträge.

b) Hat eine Matrix nur ganzzahlige Einträge, so ist auch ihre Determinante ganzzahlig.

c) Hat eine Matrix nur positive Einträge, so ist auch ihre Determinante eine positiv.

d) Jedes lineare Gleichungssystem besitzt genau eine oder unendlich viele Lösungen.

(G 1) Matrizen
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie, falls möglich, folgende Summen $A+B$, $A+C$ und $B+C$.

b) Berechnen Sie, falls möglich, folgende Matrizenprodukte A^2, AB, BA, B^TA und B^2.

c) Wieviele Operationen (Additionen, Multiplikationen) werden benötigt, um die Summe bez. das Produkt zweier $n \times n$-Matrizen zu berechnen?

(G 2) Determinanten
Berechnen Sie die Determinanten von A, C, $A+C$ sowie AC, wobei A und C die Matrizen aus (G 1) sind. Welche dieser Matrizen sind regulär?

(G 3) Gleichungssysteme
Ermitteln Sie alle Lösungen $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ des Gleichungssystemes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_4 &= 6 \\ 2x_2 + x_3 &= 8 \,. \end{aligned}$$

(G 4) Inverse Matrix und Gleichungssysteme
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie die Inverse A^{-1} von A.

b) Lösen Sie nun die Gleichungssysteme

$$Ax = (1,2,1)^T \quad , \quad Ax = (3,1,2)^T \quad \text{und} \quad Ax = (2,4,-1)^T \,.$$

(H 1) Determinante einer Matrix
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

zum Parameter a.

a) Berechnen Sie $\det(A)$ in Abhängigkeit von a.

b) Ermitteln Sie, in Abhängigkeit von a, den Rang, den Kern sowie das Bild der Matrix A.

(H 2) Potenzen von Matrizen
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie A^2, A^3 und A^4.

b) Bestimmen Sie nun die Potenz A^n für eine beliebige, natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$.

(H 3) Die Spur einer Matrix
Für eine $n \times n$-Matrix A erklären wir ihre Spur durch

$$\operatorname{spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung vom Raum der $n \times n$-Matrizen in die reellen Zahlen ist, d.h. zeigen Sie

$$\operatorname{spur}(A+B) = \operatorname{spur}(A) + \operatorname{spur}(B) \quad , \quad \operatorname{spur}(tA) = t \operatorname{spur}(A) .$$

b) Beweisen Sie für zwei beliebige $n \times n$-Matrizen A und B die Regel $\operatorname{spur}(AB) = \operatorname{spur}(BA)$.

c) Zwei Matrizen A und B nennt man zueinander ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix C gibt mit $B = C^{-1}AC$. Zeigen Sie, dass zwei zueinander ähnliche Matrizen dieselbe Spur besitzen.