(Testfragen)
Welche der folgenden Aussagen sind **im Raum** wahr bez. falsch?

a) falsch

b) richtig

c) richtig

d) falsch

(G 1) Geraden im Raum
Die Geraden g und h seien durch die Parameterdarstellungen $\vec{r} = (a,1,1)^T + s(1,2,3)^T$ sowie $\vec{r} = (0,3,2)^T + t(1,1,2)^T$ gegeben, wobei a ein Parameter sei.

a) Löse das Gleichungssystem $(a,1,1)^T + s(1,2,3)^T = (0,3,2)^T + t(1,1,2)^T$. Lösung ist $s = 3$, $t = 4$ und $a = 1$. Also Schnittpunkt für $a = 1$.

b) Schnittpunkt ist $(1,1,1) + 3(1,2,3) = (4,7,10)$ und Schnittwinkel: $\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{14}\sqrt{6}}$, damit $\alpha = 10.9°$.

(G 2) Ebenen im Raum
Die Ebene E sei durch die Parameterdarstellung $\vec{r} = (1,1,1)^T + s(2,1,2)^T + t(1,3,2)^T$ gegeben und die Ebene F durch die Gleichung $x + y + z = 3$.

a) Hesse-Normalform von E: Berechne Kreuzprodukt $(2,1,2)^T \times (1,3,2)^T = (-4,-2,5)$. Gleichung für E ist damit $-4x - 2y + 5z + 1 = 0$ und Hesse-Normalform $\frac{1}{\sqrt{45}}(-4x - 2y + 5z + 1) = 0$. Parameterdarstellung von F: Wähle zwei lin. unabh., auf $(1,1,1)$ senkrecht stehende Vektoren, z.B. $(1,-1,0)$ und $(1,0,-1)$ sowie einen Punkt auf F, z.B. $(3,0,0)$. Damit ist eine Parameterdarstellung: $\vec{r} = (3,0,0)^T + s(1,-1,0)^T + t(1,0,-1)^T$.

b) Man nimmt die beiden Gleichungen der Ebenen: $-4x - 2y + 5z + 1 = 0$ sowie $x + y + z - 3 = 0$. Setze $z = \lambda$ und löse nach x und y auf: $y = \frac{1}{2}(11 - 9\lambda)$ und $x = \frac{1}{2}(7\lambda - 5)$. Damit ist eine Parameterdarstellung von Schnittgeraden: $\vec{r} = (-\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, 0)^T + \lambda(\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}, 1)^T$

(G 3) Lineare Unabhängigkeit
Gegeben sind folgende vier Vektoren $v_1 = (1,1,1)^T$, $v_2 = (2,1,2)^T$, $v_3 = (1,3,1)^T$ und $v_4 = (1,1,0)^T$.

a) Sie sind linear abhängig wegen $v_3 = 5v_1 - 2v_2$. Nur v_1, v_2 sind linear unabhängig, damit sind sie eine Basis und Dimension des Unterraumes ist 2.

b) Wir berechnen $\det(v_1, v_2, v_3) = (v_1 \times v_2) \cdot v_3 = 1 \neq 0$. Damit sind sie linear unabhängig.

(G 4) Lineare Abbildungen
Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y,x) = (x + y, x + z, y - z)$ ist linear. Zur Ermittlung von $kern\varphi$ löse das Gleichungssystem $\varphi(x,y,z) = (0,0,0)$. Lösungsmenge ist 1-dimensional, damit Dimension des Kernes gleich 1 und Dimension vom Bild ist $3 - 1 = 2$.

b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y) = (x^2, y^2, x-y)$ ist nicht linear (da x^2 keine lineare Funktion ist.)

c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x,y,z) = (x-y, x-z, 2x+y, z)$ ist linear. Der Kern ist 0-dimensional und das Bild ist $3-0=3$-dimensional.

d) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = (0, x, 2x)$ ist linear. Der Kern ist 0-dimensional und das Bild ist $1-0=1$-dimensional.

(H 1) Geraden und Ebenen im Raum
Die Ebene E enthalte die drei Punkte $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ sowie $(0,0,a)$ und die Gerade g sei durch die Parameterdarstellung $\vec{r} = (3,1,0)^T + t(a+1, 2, 2a)$ gegeben, wobei $a \neq 0$ ein Parameter ist.

a) Eine Gleichung für E lautet $x+y+z=a$ und eine Hesse-Normalform ist $\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z-a)=0$.

b) Die Gerade g steht senkrecht auf E dann, wenn ihr Richtungsvektor $(a+1,2,2a)$ diesselbe Richtung hat wie $(1,1,1)$. Dies ist nur für $a=1$ der Fall. Der Schnittpunkt ist dann $(2,0,-1)$.

c) Damit g und E parallel liegen, muss der Richtungsvektor $(a+1,2,2a)$ von g senkrecht auf $(1,1,1)$ stehen, dies ist nur für $a=-1$ der Fall. Der Abstand von g zu E ist gleich dem Abstand eines beliebigen Punktes auf g zu E, z.B. $(3,1,0)$. Der Abstand ist dann $\frac{1}{\sqrt{3}}(3+1-(-1)) = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

(H 2) Dreieck im Raum
Gegeben sei ein Dreieck PQR mit den Eckpunkten $P=(0,1,2)$, $Q=(2,1,3)$ und $R=(3,2,1)$.

a) Es ist $\vec{PQ} = (2,0,1)^T$ und $\vec{PR} = (3,1,-1)$. Diese Vektoren sind linear unabhängig und die drei Punkte liegen somit nicht auf einer Geraden.

b) Es ist $a = |\vec{PQ}| = \sqrt{5}$, $b = |\vec{PR}| = \sqrt{11}$ und $c = |\vec{QR}| = \sqrt{6}$.

c) Der Flächeninhalt des Dreiecks ist gerade die Hälfte des Flächeninhaltes des von den Vektoren $\vec{PQ}$ und $\vec{PR}$ aufgespannten Parallelogrammes, damit ist $A = \frac{1}{2}|\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \frac{\sqrt{30}}{2}$.

(H 3) Lineare Abbildungen
Es seien $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$ und $v_4 = (3,2,1)$. Weiter sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(v_1) = (2,1,2)$, $\varphi(v_2) = (1,2,1)$ und $\varphi(v_3) = (3,2,1)$.

a) Wir berechnen $\det(v_1, v_2, v_3) = (v_1 \times v_2) \cdot v_3 = 1 \neq 0$, damit sind die Vektoren linear unabhängig.

b) Beachte $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$. Damit ist $\varphi(v_4) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) + \varphi(v_3) = (6,5,4)$.

c) Beachte $\varphi(v) = (0,1,2) = (2,1,2) + (1,2,1) - (3,2,1) = \varphi(v_1 + v_2 - v_3) = \varphi(v)$ Damit ist $v = v_1 + v_2 - v_3 = (1,0,-1)$.