(Testfragen)
Welche der folgenden Aussagen sind **im Raum** wahr bez. falsch?

a) falsch

b) richtig

c) richtig

d) falsch

(G 1) Geraden im Raum
Die Geraden g und h seien durch die Parameterdarstellungen $\vec{r} = (a, 1, 1)^T + s(1, 2, 3)^T$ sowie $\vec{r} = (0, 3, 2)^T + t(1, 1, 2)^T$ gegeben, wobei a ein Parameter sei.

a) Löse das Gleichungssystem $(a, 1, 1)^T + s(1, 2, 3)^T = (0, 3, 2)^T + t(1, 1, 2)^T$. Lösung ist $s = 3$, $t = 4$ und $a = 1$. Also Schnittpunkt für $a = 1$.

b) Schnittpunkt ist $(1, 1, 1) + 3(1, 2, 3) = (4, 7, 10)$ und Schnittwinkel: $\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{14}\sqrt{6}}$, damit $\alpha = 10.9°$.

(G 2) Ebenen im Raum
Die Ebene E sei durch die Parameterdarstellung $\vec{r} = (1, 1, 1)^T + s(2, 1, 2)^T + t(1, 3, 2)^T$ gegeben und die Ebene F durch die Gleichung $x + y + z = 3$.

a) Hesse-Normalform von E: Berechne Kreuzprodukt $(2, 1, 2)^T \times (1, 3, 2)^T = (-4, -2, 5)$. Gleichung für E ist damit $-4x - 2y + 5z + 1 = 0$ und Hesse-Normalform $\frac{1}{\sqrt{45}}(-4x - 2y + 5z + 1) = 0$. Parameterdarstellung von F: Wähle zwei lin. unabh., auf $(1, 1, 1)$ senkrecht stehende Vektoren, z.B. $(1, -1, 0)$ und $(1, 0, -1)$ sowie einen Punkt auf F, z.B. $(3, 0, 0)$. Damit ist eine Parameterdarstellung: $\vec{r} = (3, 0, 0)^T + s(1, -1, 0)^T + t(1, 0, -1)^T$.

b) Man nimmt die beiden Gleichungen der Ebenen: $-4x - 2y + 5z + 1 = 0$ sowie $x + y + z - 3 = 0$. Setze $z = \lambda$ und löse nach x und y auf: $y = \frac{1}{2}(11 - 9\lambda)$ und $x = \frac{1}{2}(7\lambda - 5)$. Damit ist eine Parameterdarstellung von Schnittgeraden: $\vec{r} = (-\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, 0)^T + \lambda(\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}, 1)^T$

(G 3) Lineare Unabhängigkeit
Gegeben sind folgende vier Vektoren $v_1 = (1, 1, 1)^T$, $v_2 = (2, 1, 2)^T$, $v_3 = (1, 3, 1)^T$ und $v_4 = (1, 1, 0)^T$.

a) Sie sind linear abhängig wegen $v_3 = 5v_1 - 2v_2$. Nur v_1, v_2 sind linear unabhängig, damit sind sie eine Basis und Dimension des Unterraumes ist 2.

b) Wir berechnen $\det(v_1, v_2, v_3) = (v_1 \times v_2) \cdot v_3 = 1 \neq 0$. Damit sind sie linear unabhängig.

(G 4) Lineare Abbildungen
Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, x) = (x + y, x + z, y - z)$ ist linear. Zur Ermittlung von $kern\varphi$ löse das Gleichungssystem $\varphi(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Lösungsmenge ist 1-dimensional, damit Dimension des Kernes gleich 1 und Dimension vom Bild ist $3 - 1 = 2$.

b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x^2, y^2, x - y)$ ist nicht linear (da x^2 keine lineare Funktion ist.)

c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x, y, z) = (x - y, x - z, 2x + y, z)$ ist linear. Der Kern ist 0-dimensional und das Bild ist $3 - 0 = 3$-dimensional.

d) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = (0, x, 2x)$ ist linear. Der Kern ist 0-dimensional und das Bild ist $1 - 0 = 1$-dimensional.