(Testfragen)
Welche der folgenden Aussagen sind **im Raum** wahr bez. falsch?

a) Zwei beliebige Geraden schneiden sich oder sind parallel.

b) Zwei Ebenen haben entweder keinen oder unendlich viele Schnittpunkte.

c) Durch drei Punkte geht stets eine Ebene.

d) Schneiden sich zwei Ebenen in vier Punkten, so stimmen sie überein.

(G 1) Geraden im Raum
Die Geraden $g$ und $h$ seien durch die Parameterdarstellungen $\vec{r} = (a, 1, 1)^T + s(1, 2, 3)^T$ sowie $\vec{r} = (0, 3, 2)^T + t(1, 1, 2)^T$ gegeben, wobei $a$ ein Parameter sei.

a) Für welchen Wert von $a$ schneiden sich die Geraden $g$ und $h$?

b) Ermitteln Sie in diesem Fall Schnittpunkt und Schnittwinkel.

(G 2) Ebenen im Raum
Die Ebene $E$ sei durch die Parameterdarstellung $\vec{r} = (1, 1, 1)^T + s(2, 1, 2)^T + t(1, 3, 2)^T$ gegeben und die Ebene $F$ durch die Gleichung $x + y + z = 3$.

a) Ermitteln Sie eine Hesse-Normalform von $E$ und eine Parameterdarstellung von $F$.

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden von $E$ und $F$ an.

(G 3) Lineare Unabhängigkeit
Gegeben sind folgende vier Vektoren $v_1 = (1, 1, 1)^T$, $v_2 = (2, 1, 2)^T$, $v_3 = (1, 3, 1)^T$ und $v_4 = (1, 1, 0)^T$.

a) Zeigen Sie, dass $v_1, v_2, v_3$ linear abhängig sind. Ermitteln Sie die Dimension des von $v_1, v_2, v_3$ aufgespannten Unterraumes sowie eine Basis dieses Raumes.

b) Zeigen Sie, dass $v_1, v_2, v_4$ linear unabhängig sind.

(G 4) Lineare Abbildungen
Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, x) = (x + y, x + z, y - z)$

b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x^2, y^2, x - y)$

c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x, y, z) = (x - y, x - z, 2x + y, z)$

d) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = (0, x, 2x)$

Ermitteln Sie für die linearen Abbildungen jeweils die Dimension von Kern$\varphi$ sowie Bild$\varphi$.

(H 1) Geraden und Ebenen im Raum
Die Ebene $E$ enthalte die drei Punkte $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ sowie $(0, 0, a)$ und die Gerade $g$ sei durch die Parameterdarstellung $\vec{r} = (3, 1, 0)^T + t(a + 1, 2, 2a)$ gegeben, wobei $a \neq 0$ ein Parameter ist.

a) Ermitteln Sie eine Hesse-Normalform von $E$.

b) Für welchen Wert von $a$ steht die Gerade $g$ senkrecht auf $E$? Ermitteln Sie in diesem Fall den Schnittpunkt von $g$ und $E$.

c) Für welchen Wert von $a$ liegen $g$ und $E$ parallel zueinander? Ermitteln Sie für diesen Wert den Abstand von $g$ zu $E$.

(H 2) Dreieck im Raum
Gegeben sei ein Dreieck $PQR$ mit den Eckpunkten $P = (0, 1, 2)$, $Q = (2, 1, 3)$ und $R = (3, 2, 1)$.

a) Zeigen Sie, dass $P$, $Q$ und $R$ nicht auf einer Gerade liegen und somit wirklich ein Dreieck bilden.

b) Ermitteln Sie die Seitenlängen des Dreiecks.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

(H 3) Lineare Abbildungen
Es seien $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ und $v_4 = (3, 2, 1)$. Weiter sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(v_1) = (2, 1, 2)$, $\varphi(v_2) = (1, 2, 1)$ und $\varphi(v_3) = (3, 2, 1)$.

a) Zeigen Sie, dass $v_1, v_2, v_3$ linear unabhängig sind.

b) Berechnen Sie $\varphi(v_4)$.

c) Ermitteln Sie einen Vektor $v$ mit $\varphi(v) = (0, 1, 2)$.