(Testfragen)
Welche der folgenden Aussagen sind in der Ebene wahr bez. falsch?

a) wahr

b) falsch

c) falsch

d) wahr so liegen f und h parallel.

(G 1) Geraden in der Ebene
Es seien $P = (2, 0)$, $Q = (5, 4)$ sowie $R = (3, 3)$ drei Punkte und g die Gerade durch P und Q.

a) Richtungsvektor der Geraden ist $\vec{PQ} = (3, 4)^T$, also ist eine Parameterdarstellung $\vec{r} = (2, 0)^T + t(3, 4)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Wähle A, B und C so, dass P und Q die Gleichung $Ax + By = C$ erfüllen, z.B. $4x - 3y = 8$.

c) nein, P erfüllt nicht die Gleichung aus b).

c) Der Richtungsvektor dieser Gerade steht senkrecht auf dem Richtungvektor von g und ist also $(-4, 3)^T$. Eine Geradengleichung lautet dann $3x + 4y = 21$.

e) Löse das Gleichungssystem $4x - 3y = 8$ und $3x + 4y = 21$, Lösung ist $x = \frac{19}{5}$ und $y = \frac{12}{5}$, also ist der Schnittpunkt $(\frac{19}{5}, \frac{12}{5})$.

(G 2) Hessesche Normalform
Die Gerade g sei durch die Parameterdarstellung $\vec{r} = (2, 1)^T + t\,(3, 2)^T$.

a) Normalenvektor ist $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3)^T$ und ein Punkt auf g ist $P = (2, 1)$.

b) Eine Geradengleichung lautet $-2x + 3y + 1 = 0$ und eine Hesse-Normalform von g ist $\frac{-2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y + \frac{1}{\sqrt{13}} = 0$.

c) Man setzt $(1, 1)$ in die Hesse-Normalform von g ein und erhält $d = |\frac{-2}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{13}}| = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

(G 3) Länge und Skalarpodukt von Vektoren

a) Der Winkel berechnet sich über $\cos\alpha = \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}||\vec{s}|} = \frac{7}{\sqrt{25}\sqrt{2}} = 0,99$ und damit $\alpha = 8,1°$.

b) Ist $\alpha \in [0, \pi)$ der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{s}$ und $\beta \in [0, \pi)$ der zwischen $a\vec{r}$ und $b\vec{s}$, so gilt
$$\cos\beta = \frac{(a\vec{r})\cdot(b\vec{s})}{|a\vec{r}||b\vec{s}|} = \frac{ab\,\vec{r}\cdot\vec{s}}{|a||b||\vec{r}||\vec{s}|} = \frac{ab\,\vec{r}\cdot\vec{s}}{ab|\vec{r}||\vec{s}|} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}||\vec{s}|} = \cos\alpha$$
und damit $\beta = \alpha$ (Wegen $a, b > 0$ ist $|a| = a$ und $|b| = b$.)

c) Wir benutzen die Definition der Norm $|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}$ und erhalten
$$\begin{aligned} |\vec{u}+\vec{v}|^2 + |\vec{u}-\vec{v}|^2 &= (\vec{r}+\vec{s})\cdot(\vec{r}+\vec{s}) + (\vec{r}-\vec{s})\cdot(\vec{r}-\vec{s}) \\ &= \vec{r}\cdot\vec{r} + 2\vec{r}\cdot\vec{s} + \vec{s}\cdot\vec{s} + \vec{r}\cdot\vec{r} - 2\vec{r}\cdot\vec{s} + \vec{s}\cdot\vec{s} = 2(|\vec{r}|^2 + |\vec{s}|^2)\ . \end{aligned}$$
Die zwei Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{s}$ spannen ein Parallelogramm auf, dessen Diagonalen gerade $\vec{r}+\vec{s}$ und $\vec{r}-\vec{s}$ sind. Hat also ein Parallelogramm die Seitenlängen a und b und die Diagonalenlängen c und d, so gilt $c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$, daher der Name Parallelogrammgleichung.

(H 1) Geraden in der Ebene
Die Gerade g sei durch die Gleichung $2x + y = 10$ erklärt. Die Gerade h enthalte den Punkt $(1, 1)$ und besitze den Richtungsvektor $(1, 3)^T$.

a) Schnittpunkt mit x-Achse: Setze $y = 0$ in Gleichung für g ein, dann ist $x = 5$, also Schnittpunkt $(5, 0)$ analog Schnittpunkt mit y-Achse: $(0, 10)$.

b) Diese Gerade hat Richtungsvektor $(-1, 2)$, also denselben Richtungsvektor wie g, die Geraden sind parallel. Da $(3, 3)$ nicht auf g liegt (erfüllt nicht die Gleichung von g), stimmen diese beiden Geraden nicht überein.

b) Parameterdarstellung von g: $\vec{r} = (5, 0)^T + t(-1, 2)^T$, $t \in \mathbb{R}$; Gleichung für h: $-3x + y = -2$.

c) Schnittpunkt von g und h: $(\frac{12}{5}, \frac{26}{5})$.

(H 2) Hesse-Normalform
Die Gerade g gehe durch die Punkte $(1, -1)$ sowie $(4, 3)$, die Gerade h ist durch die Gleichung $y - x = 1$ gegeben.

a) Hesse-Normalform von g: $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{7}{5} = 0$ und die von h: $-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$.

b) Alle Punkte, welche von g den Abstand 1 haben, werden durch die Gleichung $1 = d = |-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{7}{5}|$ beschrieben. Nach Auflösen des Betrages erhält man die Gleichung $\pm 5 = -4x + 3y + 7$. Zusammen mit der Gleichung $y - x = 1$ von h erhält man ein Gleichungssystem, dessen zwei Lösungen $(5, 6)$ und $(15, 16)$ sind.

(H 3) Dreieck in der Ebene
Ein Dreieck PQR ist gegeben durch die drei Eckpunkte $P = (1, 2)$, $Q = (3, 1)$ und $R = (5, 4)$.

b) Es sind $a = |\vec{PQ}| = \sqrt{5}$, $b = |\vec{PR}| = \sqrt{20}$ und $c = |\vec{QR}| = \sqrt{13}$.

c) Es ist $\cos\alpha = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{PR}}{|\vec{PQ}||\vec{PR}|} = \frac{6}{\sqrt{5}\sqrt{20}} = 0.6$, damit $\alpha = 53.13°$.

d) Es ist $A = \frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{20}\sin\alpha = 4$. *Hinweis:* $A = 4$ ist das exakte Ergebnis! (keine Rundungsfehler)