(Testfragen)
Der Funktion aus (d) entspricht der Ansatz (c), (e) entspricht (b), (f) entspricht (a) (Siehe S.54).

(G 1) **Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

Lösung:
1. Das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$ hat die Nullstellen: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist $y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.
2. Spezielle Lösung $y^\star(x)$ der Gleichung $y'' - y = 2e^x - x^2$ ist gleich der Summe von speziellen Lösungen $y_1^\star(x)$ der Gleichung $y'' - y = 2e^x$ und $y_2^\star(x)$ der Gleichung $y'' - y = -x^2$. Man bestimme die spezielle Lösungen $y_i^\star(x), i = 1, 2$ durch den Ansatz vom Typ der Störfunktion. Der Ansatz für $y_1^\star(x)$ ist $y_1^\star(x) = ae^x x$ (1 ist eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms). Einsetzen in die Differenzialgleichung liefert $a = 1$. Der Ansatz für $y_2^\star(x)$ ist $y_2^\star(x) = cx^2 + bx + d$. Durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich erhält man $c = 1, b = 0, d = 2$.
3. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ist $y(x) = y_0(x) + y_1^\star(x) + y_2^\star(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^x x + x^2 + 2$.

(G 2) **Systeme von Differentialgleichungen**

Lösung:

a) Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix sind $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$. Dem Eigenwert $\lambda_1 = 3 + 2i$ entspricht der Eigenvektor $\vec{v}_1 = \binom{1}{1} + i\binom{0}{-2}$. Die allgemeine Lösung ist daher $y_1(x) = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x), y_2(x) = e^{3x}(c_1(\cos 2x + 2\sin 2x) + c_2(\sin 2x - 2\cos 2x))$.

b) Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix sind $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$. Dem Eigenwert $\lambda_1 = 1$ entspricht der Eigenvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 1 + 2i$ entspricht $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Die allgemeine Lösung ist $y_1(x) = 2e^x(c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x), y_2(x) = e^x(c_1 + c_2 \sin 2x - c_3 \cos 2x), y_3(x) = e^x(-c_1 + 3c_2 \sin 2x - 3c_3 \cos 2x)$.

(G 3) **Eigenwertprobleme**

Lösung: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} \ln x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$. Differenzieren und Einsetzen $x = 1$ in die erste Randwertbedingung liefert $y'(1) = 0 + c_2\sqrt{\lambda} = 0$. Daraus folgt, dass $c_2 = 0$ ist. Aus der zweiten Randwertbedingung $y'(e^{2\pi}) = -c_1 \sin(\sqrt{\lambda} 2\pi) = 0$ folgt, dass die positiven Eigenwerte des Problems durch $\lambda_n = \frac{n^2}{4}, n \in \mathbb{N}$ gegeben sind. Zu den Eigenwerten λ_n gehören die Eigenfunktionen $y_n(x) = c\cos(\frac{n \ln x}{2}), c \in \mathbb{R}$.