(Testfragen)
Vorgegeben sei die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = b(x)$. Die Zahl $\lambda = 1 + i$ sei eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$. Wählen Sie aus der folgenden Liste einen entsprechenden Ansatz für die spezielle Lösung $y^\star(x)$

(a) $y^\star(x) = c_1e^x + \cos x(c_2x + c_3) + \sin x(c_4x + c_5)$,

(b) $y^\star(x) = xe^x(\cos x(c_1x + c_2) + \sin x(c_3x + c_4))$,

(c) $y^\star(x) = xe^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$,

wenn die Störfunktion $b(x)$ durch eine der folgenden Funktionen

(d) $b(x) = e^x \cos x$,

(e) $b(x) = xe^x \cos x$,

(f) $b(x) = e^x + x \cos x$

gegeben ist.

(G 1) **Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - y = 2e^x - x^2$.

(G 2) **Systeme von Differentialgleichungen**

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung für die folgenden linearen homogenen Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung:

(a) $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 \\ y_3' = 3y_1 + y_3. \end{cases}$

(G 3) **Eigenwertprobleme**

Vorgelegt sei das Eigenwertproblem

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{\lambda}{x^2}y = 0,$$
$$y'(1) = y'(e^{2\pi}) = 0.$$

Ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung für positive λ ist durch die Funktionen $y_1(x) = \cos(\sqrt{\lambda} \ln x)$, $y_2(x) = \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$ gegeben. Ermitteln Sie sämtliche positiven Eigenwerte λ und die zugehörigen Eigenfunktionen des Problems.

Wir wünschen allen Teilnehmern schöne Ferien und viel Erfolg im weiteren Studium.