(H 1) **Lineare Unabhängigkeit von Funktionen**

Lösung:

(a) Die Wronskische Determinante $\det W(x) = (k-n)x^{n+k-1} \neq 0$ für $x \neq 0$. Daher sind y_1, y_2 auf I linear unabhängig.

(b) Sei $c_1x + c_2x^5 + c_3|x^5| = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $c_1x + c_2x^5 + c_3x^5 = 0$ für $x > 0$ und $c_1x + c_2x^5 - c_3x^5 = 0$ für $x < 0$. Daraus folgt, dass $c_3 = 0$ ist. Nach (a) sind y_1, y_2 linear unabhängig. Daher ist $c_1 = c_2 = 0$. Daraus kann man schließen, dass die Funktionen y_1, y_2, y_3 linear unabhängig auf I sind (obwohl die Wronkische Determinante $W(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist).

(c) In $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$ können wir die Konstanten $c_1 = 1, c_2 = -2, c_3 = -1$ wählen. Dann ist $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 = 1 - 2\sin^2 x - \cos 2x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass y_1, y_2, y_3 linear abhängig sind.

(H 2) **Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

Lösung:

(a) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3$ sind $\lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_{4,5} = 3$. Die allgemeine Lösung ist $y(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3 + e^{3x}(c_4x + c_5)$.

(b) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1$ sind $\lambda_{1,2} = i, \lambda_{3,4} = -i$. Die allgemeine Lösung ist $y(x) = (c_1x + c_2)\cos x + (c_3x + c_4)\sin x$.

(c) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^5 - 2\lambda^4 - 16\lambda + 32$ sind $\lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = -2, \lambda_{4,5} = \pm 2i$. Die allgemeine Lösung ist $y(x) = (c_1x + c_2)e^{2x} + c_3e^{-2x} + c_4\cos 2x + c_5 \sin 2x$.

(H 3) **Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

Lösung: Die Nullstellen des Charakteristischen Polynoms sind $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Im Falle

(1) $a^2 > 4b$ ist die allgemeine Lösung $y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$. Sie ist auf ganz $\mathbb{R}$ unbeschränkt.

(2) $a^2 = 4b$ ist die allgemeine Lösung $y(x) = (c_1x + c_2)e^{-\frac{ax}{2}}$. Sie ist auch für alle $a \in \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ unbeschränkt.

(3) $a^2 < 4b$ ist die allgemeine Lösung $y(x) = e^{-\frac{ax}{2}}(c_1 \cos \beta x + c_1 \sin \beta x)$ mit $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$. Wenn $a \neq 0$ ist, ist sie unbeschränkt. Wenn $a = 0$ ist, ist die Lösung für alle $x \in \mathbb{R}$ beschränkt.

Daraus kann man schließen, dass die Lösung nur dann beschränkt ist, wenn $a = 0$ und $b > 0$ ist.