(Testfragen)

Sei $W(x)$ die Wronski-Matrix zu n Funktionen $y_1, \ldots, y_n$, die auf dem Intervall I $(n-1)$-mal stetig differenzierbar sind.

(a) Für $x_0, x_1 \in I$ gilt $\det W(x_0) = 0$ und $\det W(x_1) \neq 0$. Sind die Funktionen $y_1(x), ..., y_n(x)$ auf I linear abhängig?

(b) Sei $\det W(x) = 0$ für alle $x \in I$. Kann man daraus schließen, dass $y_1(x), ..., y_n(x)$ auf I linear abhängig sind?

(G 1) **Lineare Unabhängigkeit von Funktionen**

Sind die folgenden Funktionensysteme auf I linear abhängig?

(a) $y_1(x) = x+2$, $y_2(x) = x-2$, $I = \mathbb{R}$,

(b) $y_1(x) = 6x+9$, $y_2(x) = 8x+12$, $I = \mathbb{R}$,

(c) $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$, $I = \mathbb{R}$.

(G 2) **Lineare Differentialgleichungen**

Für $x > 0$ sei die inhomogene lineare Differentialgleichung $x(x+1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 2x(x+1)$ gegeben.

(a) Überprüfen Sie, ob $y_1(x) = (x+1)^2$ und $y_2(x) = x^2$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung $x(x+1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$ sind. Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung an.

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der oberen inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten.

(G 3) **Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

(a) $y'' + 2y' + 10y = 0$,

(b) $y^{(4)} - y = 0$,

(c) $4y'' + 4y' + y = 0$.

(H 1) **Lineare Unabhängigkeit von Funktionen**

Sind die folgenden Funktionensysteme auf I linear abhängig?

(a) $y_1(x) = x^n$, $y_2(x) = x^k$, $n, k \in \mathbb{N}, n \neq k$, $I = \mathbb{R}$,

(b) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^5$, $y_3(x) = |x^5|$, $I = \mathbb{R}$,

(c) $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = \sin^2 x$, $y_3(x) = \cos 2x$, $I = \mathbb{R}$.

(H 2) **Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

(a) $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y^{(3)} = 0$,

(b) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$,

(c) $y^{(5)} - 2y^{(4)} - 16y' + 32y = 0$.

(H 3) **Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

Sei die homogene lineare Differentialgleichung $y'' + ay' + by = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Für welche a und b sind alle Lösungen der Differentialgleichung auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt?