(Testfragen)
Es ist

$$(y_1 - y_2)'' = y_1'' - y_2'' = p(x)y_1' + q(x)y_1 - p(x)y_2' - q(x)y_2 = p(x)(y_1 - y_2)' + q(x)(y_1 - y_2) \; .$$

Somit ist auch $y_1 - y_2$ Lösung. Analog zeigt man, dass $y_4 := cy_1$ eine Lösung ist.

(G 1) Differentialgleichung zweiter Ordnung

a) Substituiere $z = y'$, dann ist $z' + z = x^2$. Löse mit Hilfe des Verfahrens Variation der Konstanten (Buch Seite 15), Lösung ist $z(x) = x^2 - 2x + 2 + c_1 e^{-x}$. Rücksubstitution $z = y'$ liefert $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + c_2 - c_1 e^{-x}$.

b) Für $y(0) = y'(0) = 1$ muss $c_2 - c_1 = 1$ und $2 + c_1 = 1$ sein, also $c_1 = -1$ und $c_2 = 0$. Lösung ist dann $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + e^{-x}$.

(G 2) Anfangswertproblem zweiter Ordnung
Multipliziere in $y'' = 12\sqrt{y}$ mit $2y'$ (Buch, Seite 33) und integriere, so folgt $(y')^2 + c = 16y^{\frac{3}{2}}$, und wegen der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ und $y'(1) = 4$ ist $c = 0$, also $(y')^2 = 16y^{\frac{3}{2}}$. Lösung über Trennung der Veränderlichen (Buch, Seite 12), Lösung ist $y(x) = (x + c)^4$ und wegen der Anfangsbedingung ist $c = 0$, also $y(x) = x^4$.

Zu den Anfangswerten $y(0) = y'(0) = 0$ gibt es die Lösung $y(x) = x^4$ (eben berechnet) sowie die triviale Lösung $y(x) = 0$.

(G 3) Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung
Wir betrachten für $x \neq 0$ die Differentialgleichung

$$x^2 y'' - xy' - 3y = 0 \; .$$

a) Es ist $y_1' = 3x^2$ und $y_1'' = 6x$, somit $x^2 y_1'' - xy_1' - 3y_1 = x^3(6 - 3 - 3) = 0$, somit $y_1$ eine Lösung.

b) Wir schreiben zunächst die Dgl. in der Form $y'' = \frac{1}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = p(x)y' + q(x)y$. Alle Lösungen sind von der Form $y(x) = v(x)y_1(x)$, wobei

$$v(x) = c_1 \int e^{h(x)} dx + c_2 \quad , \quad h(x) = \int (p(x) - 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}) dx \; .$$

(Buch Seite 35). Dabei ist $h(x) = \int \frac{-5}{x} dx = -5 \ln x$ und $v(x) = c_1 \int \frac{1}{x^5} dx + c_2 = c_3 x^{-4} + c_2$. Also ist die allgemeine Lösung $y(x) = v(x)y_1(x) = c_3 \frac{1}{x} + c_2 x^3$.

(G 4) Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \; .$$

a) Setze $y_1(x) = e^{\lambda x}$ in Dgl. ein, so folgt $e^{\lambda x}(\lambda^2 + 4\lambda + 3) = 0$. Daraus folgt $\lambda = -1$ oder $\lambda = -3$. Es gibt also zwei Lösungen $y_1(x) = e^{-x}$ und $y_2(x) = e^{-3x}$.

b) Wegen der Linearität der Dgl. sind alle Lösungen gegeben in der Form $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$.

(H 1) Differentialgleichung zweiter Ordnung

a) Substituiere $z = y'$, dann ist $z' - 2z = e^{2x}$. Löse mit Hilfe des Verfahrens Variation der Konstanten (Buch Seite 15), Lösung ist $z(x) = (x + c)e^{2x}$. Rücksubstitution $z = y'$ liefert $y(x) = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c_1 e^{2x} + c_2$.

b) Für $y(0) = y'(0) = 1$ muss $-\frac{1}{4} + c_1 + c_2 = 1$ und $2c_1 = 1$ sein, also $c_1 = \frac{1}{2}$ und $c_2 = \frac{3}{4}$ und die Lösung lautet $y(x) = \frac{1}{4}(2xe^{2x} + e^{2x} + 3)$.

(H 2) Anfangswertproblem zweiter Ordnung
Man multipliziert in $y'' = 2y + 2y^3$ mit $2y'$ und erhält nach Integration $(y')^2 = 2y^2 + y^4 + c$ und wegen der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ folgt $c = 1$, also $(y')^2 = y^4 + 2y^2 + 1 = (y^2 + 1)^2$. Lösung durch Trennung der Variablen liefert $y(x) = \tan(x + c)$, wobei $c = 0$ wegen der Anfangsbedingung. Damit ist $y(x) = \tan x$ die Lösung.

(H 3) Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x^2 y'' - 7xy' + 15y = 0 \ .$$

a) Man setze $y_1(x) = x^n$ in die Dgl. ein, so folgt $(n(n-1) - 7n + 15)x^n = 0$, also $n(n-1) - 7n + 15 = 0$. Lösungen sind $n = 3$ und $n = 5$, also $y_1(x) = x^3$ sowie $y_2(x) = x^5$.

b) Wegen der Linearität der Gleichung sind alle Lösungen gegeben durch $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 x^3 + c_2 x^5$.