(H 1) **Isoklinen, Richtungsfeld und Lösungskurven.**

Sei die Differentialgleichung $2(y + y') = x + 3$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie einige Isoklinen, das Richtungsfeld und einige geschätzte Lösungskurven, insbesondere die Lösungskurve zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

(b) Finden Sie die analytische Lösung zur Differentialgleichung mit $y(0) = 0$.

(c) Berechnen Sie zwei Näherungslösungen mit Hilfe des Picard-Lindelöf-Iterationsverfahrens. Starten Sie mit $u_0(x) \equiv 0$.

Lösung:

(a)

$$f(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{x+3}{2}.$$

$f'_x = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ Minima der Lösungen liegen auf $y = \frac{x+3}{2}$.

$f'_x + f \cdot f'_y = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{x}{2} + 1$ - die Kurve, auf der alle Wendepunkte liegen. Siehe Bild 2 (LZM).

(b)
$$\begin{aligned} y'(x) &= -y + \tfrac{x+3}{2}, \\ y_h(x) &= ce^{-x}, \quad y_0(x) = e^{-x} \int \tfrac{x+2}{2}\, e^x\, dx = \tfrac{1}{2}x + 1; \\ y(x) &= ce^{-x} + \tfrac{1}{2}x + 1; \\ y(0) &= c + 1 = 0 \;\Rightarrow\; c = -1. \end{aligned}$$

Spezielle Lösung zur $y(0) = 0$ ist $y_s(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}x + 1$.

(c)
$$\begin{aligned} u_0(x) &\equiv 0; \\ u_1(x) &= 0 + \textstyle\int_0^x \frac{s+3}{2} ds = \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2}\,; \\ u_2(x) &= 0 + \textstyle\int_0^x (-\frac{s^2}{4} - \frac{3s}{2} + \frac{s+3}{2}) ds = \frac{-x^3}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2}\,; \end{aligned}$$

(H 2) **Lipschitzbedingung**

Welche der folgenden Funktionen erfüllen eine Lipschitzbedingung bzgl. y auf $\mathbb{R} \times [0, \infty)$?

(a) $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2}\, y^2$,

(b) $f(x, y) = x^2 + 2y$,

(c) $f(x, y) = \frac{1}{1-x}\, y$.

Lösung:

(a) Nein, y^2 wird zu steil.

(b) Ja, $L = 2$.

(c) Nein, $|\frac{1}{1-x}| \to \infty, \quad |x| \to 1$.

(H 3) **Fortsetzbarkeit der Lösung**
Sei das Anfangswertproblem $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 0$ gegeben. Lösen Sie dieses Problem analytisch. Kann dieses Problem eine Lösung besitzen, die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definiert ist?

Lösung:

$$\begin{aligned}
y' &= y^2 + 1; \\
\int \frac{dy}{y^2+1} &= \int dx; \\
\arctan y(x) &= x + c, \quad x + c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}); \\
y(x) &= \tan(x + c); \\
y(0) &= \tan(c) = 0 \Rightarrow c = 0.
\end{aligned}$$

Die Lösung $y(x) = \tan x$ von $y' = y^2 + 1$ zur $y(0) = 0$ ist höchstens auf dem offenen Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definiert. Die Funktion $y^2 + 1$ erfüllt nicht die Lipschitz-Bedingung auf $\mathbb{R}$. Hier führt es dazu, dass die Lösung $|y(x)| \to \infty$, wenn $x \to \pm\frac{\pi}{2}$. Es ist daher unmöglich die Lösung bis $(-\pi, \pi)$ fortzusetzen.