(Testfragen)

a) Der Satz von Peano (Satz 3.2, Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure, Band II) gibt eine ausreichende Bedingung für die Existenz einer Lösung: die Funktion $f(x,y)$ muss stetig auf dem Rechteck R sein.

b) Der Satz von Picard-Lindelöf (Satz 3.3) garantiert, dass die Lösung in einer Umgebung von x_0 eindeutig ist. Die Funktion f muss zusätzlich Lipschitz-stetig bzgl. y auf R sein.

(G 1) **Isoklinen, Richtungsfeld und Lösungskurven.**
Sei die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass alle Maxima und Minima von Lösungskurven auf der Kurve $f(x,y) = 0$ liegen. Zeigen Sie, dass ein Punkt (x,y) auf der Kurve $f(x,y) = 0$ ein Maximum (bzw. Minimum) der Lösungskurve durch (x,y) ist, falls $f'_x(x,y) < 0$ ($f'_x(x,y) > 0$) gilt. Verwenden Sie dabei, dass $y''(x) = f'_x(x,y) + f'_y(x,y) \cdot y'(x)$ ist.

(b) Sei $f(x,y) = y - x^2$. Skizzieren Sie die Kurve $f(x,y) = 0$ und die Kurve $g(x,y) = f'_x + f \cdot f'_y = 0$, auf der alle Wendepunkte der Lösungen liegen.

(c) Skizzieren Sie einige Isoklinen, das Richtungsfeld und einige geschätzte Lösungskurven, insbesondere die Lösungskurve zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

(d) Finden Sie die analytische Lösung zur obigen Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

(e) Berechnen Sie mit Hilfe des Picard-Lindelöf-Iterationsverfahrens die Näherungslösungen $u_1(x), u_2(x)$ ausgehend von $u_0(x) \equiv 0$.

Lösung:

(a) Ist x_0 ein lokales Extremum der Lösung $y(x)$, dann ist $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = 0$. Also liegen alle Extrema der Lösungen auf der Kurve $f(x,y) = 0$.

Sei die Lösungskurve $y(x)$ gegeben, die durch den auf der Kurve $f(x,y) = 0$ liegenden Punkt (x_0, y_0) läuft. Wenn $y''(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + 0 < 0$ (bzw. > 0) ist, dann ist x_0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum) der Lösung $y(x)$.

(b) Alle Maxima und Minima liegen auf $y = x^2$. $f'_x = -2x$. Daher sind alle Punkte auf $y = x^2$ mit $x < 0$ (bzw. $x > 0$) Minima (bzw. Maxima) der Lösungen. $y = x^2 + 2x$ ist die Kurve, auf der alle Wendepunkte der Lösungen liegen.

(c) Siehe Bild 1 (LZM).

(d)
$$\begin{aligned} y_h(x) &= ce^x, \quad y_0(x) = -e^x \int x^2 e^{-x} dx = x^2 + 2x + 2; \\ y(x) &= y_0(x) + y_h(x) = ce^x + x^2 + 2x + 2; \\ y(0) &= c + 2 = 0 \Rightarrow c = -2; \end{aligned}$$

Eine spezielle Lösung zu $y(0) = 0$ ist

$$y_s(x) = -2e^x + x^2 + 2x + 2.$$

(e) $$\begin{aligned} u_0(x) &\equiv 0; \\ u_1(x) &= 0 + \int_0^x -s^2 ds = -\tfrac{x^3}{3}\,; \\ u_2(x) &= 0 + \int_0^x (-\tfrac{s^3}{3} - s^2) ds = \tfrac{-x^4}{12} - \tfrac{x^3}{3}\,. \end{aligned}$$
Die erhaltenen Näherungslösungen sind die Partialsummen der Potenzreihe um 0 der exakten Lösung.

(G 2) **Lipschitzbedingung**
Welche der folgenden Funktionen erfüllen eine Lipschitzbedingung bzgl. y auf $\mathbb{R} \times [0, \infty)$?

(a) $f(x, y) = x^2 \cdot y$,

(b) $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2}\, y$,

(c) $f(x, y) = \sqrt{y}$.

Lösung:

(a) Nein, x^2 wächst über alle Schranken hinaus.

(b) Ja, $L = 1$.

(c) Nein. In der Umgebung von 0 ist die Funktion zu steil. Für jedes $L > 0$ können wir $y_1 = 0$ setzen und y_2 so klein wählen, dass $y_2^{-1/2} > L$ (z.B. wenn $L \geq 1$, ist $y_2 = (L+1)^{-2}$ und wenn $L < 1$, ist $y_2 = L^2$).

(G 3) **Eindeutigkeit der Lösung**
Sei die Differentialgleichung $y'(x) = \sqrt{1 - y^2(x)}$, $|y(x)| \leq 1$ gegeben. Erfüllt die rechte Seite eine Lipschitz-Bedingung bzgl. y auf $\mathbb{R} \times [-1, 1]$? Finden Sie eine analytische Lösung. Gibt es eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$?

Lösung: Die Lipschitz-Bedingung ist nicht erfüllt, denn es gilt $f_y = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ und dieser Ausdruck wird beliebig gross für $y \to \pm 1$.
Analytische Lösung:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2(x)}} &= \int dx, \quad y \equiv \pm 1 \text{ sind konstante Lösungen;} \\ \arcsin y(x) &= x + c, \end{aligned}$$
$$\begin{cases} y(x) = \sin(x + c), & x + c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]; \\ y(x) \equiv \pm 1; \end{cases}$$

Die Lösung der obigen Differentialgleichung mit $y(0) = 1$ ist nicht eindeutig, da es mindestens zwei Integralkurven $y(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ und $y(x) \equiv 1$ existieren, die die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllen.