(Testfragen) Sei das Anfangswertproblem $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ (1) gegeben.

a) Nennen Sie eine möglichst schwache Bedingung an die Funktion $f(x,y)$, die für die Existenz der Lösung von (1) in einer Umgebung von x_0 ausreichend ist?

b) Mit welcher Bedingung an die Funktion $f(x,y)$ kann man garantieren, dass die Lösung von (1) in einer Umgebung von x_0 eindeutig ist?

(G 1) **Isoklinen, Richtungsfeld und Lösungskurven.**
Sei die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass alle Maxima und Minima von Lösungskurven auf der Kurve $f(x,y) = 0$ liegen. Zeigen Sie, dass ein Punkt (x,y) auf der Kurve $f(x,y) = 0$ ein Maximum (bzw. Minimum) der Lösungskurve durch (x,y) ist, falls $f'_x(x,y) < 0$ ($f'_x(x,y) > 0$) gilt. Verwenden Sie dabei, dass $y''(x) = f'_x(x,y) + f'_y(x,y) \cdot y'(x)$ ist.

(b) Sei $f(x,y) = y - x^2$. Skizzieren Sie die Kurve $f(x,y) = 0$ und die Kurve $g(x,y) = f'_x + f \cdot f'_y = 0$, auf der alle Wendepunkte der Lösungen liegen.

(c) Skizzieren Sie einige Isoklinen (die Höhenlinien der Funktion $f(x,y)$), das Richtungsfeld und einige geschätzte Lösungskurven, insbesondere die Lösungskurve zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

(d) Finden Sie die analytische Lösung zur obigen Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

(e) Berechnen Sie mit Hilfe des Picard-Lindelöf-Iterationsverfahrens die Näherungslösungen $u_1(x), u_2(x)$ ausgehend von $u_0(x) \equiv 0$.

(G 2) **Lipschitzbedingung**
Welche der folgenden Funktionen erfüllen die Lipschitz-Bedingung bzgl. y auf $\mathbb{R} \times [0,\infty)$?

(a) $f(x,y) = x^2 \cdot y$,

(b) $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2}\, y$,

(c) $f(x,y) = \sqrt{y}$.

(G 3) **Eindeutigkeit der Lösung**
Sei die Differentialgleichung $y'(x) = \sqrt{1 - y^2(x)}$, $|y(x)| \le 1$ gegeben. Erfüllt die rechte Seite eine Lipschitz-Bedingung bzgl. y auf $\mathbb{R} \times [-1,1]$? Finden Sie eine analytische Lösung. Gibt es eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$?

(H 1) **Isoklinen, Richtungsfeld und Lösungskurven.**

Sei die Differentialgleichung $2(y + y') = x + 3$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie einige Isoklinen, das Richtungsfeld und einige geschätzte Lösungskurven, insbesondere die Lösungskurve zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

(b) Finden Sie die analytische Lösung zur obigen Differentialgleichung mit $y(0) = 0$.

(c) Berechnen Sie zwei Näherungslösungen mit Hilfe des Picard-Lindelöf-Iterationsverfahrens. Starten Sie mit $u_0(x) \equiv 0$.

(H 2) **Lipschitzbedingung**

Welche der folgenden Funktionen erfüllen die Lipschitz-Bedingung bzgl. y auf $\mathbb{R} \times [0, \infty)$?

(a) $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2}\, y^2$,

(b) $f(x, y) = x^2 + 2y$,

(c) $f(x, y) = \frac{1}{1-x}\, y$.

(H 3) **Fortsetzbarkeit der Lösung**

Sei das Anfangswertproblem $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 0$ gegeben. Lösen Sie dieses Problem analytisch. Kann dieses Problem eine Lösung besitzen, die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definiert ist?