(Testfragen)
Nur y_1 und y_3 sind Lösungen, die anderen nicht.

(G 1) Trennung der Variablen

a) In der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{x}$ bringt man alles mit y auf die linke Seite, alles mit x auf die rechte Seite und integriert

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

Es folgt

$$\arctan(y) = \ln|x| + c .$$

Nach y umgestellt

$$y = y(x) = \tan(\ln|x| + c) .$$

b) Es ist

$$0 = y(-1) = \tan(\ln 1 + c) = \tan(c) .$$

Das ist für $c = 0$ erfüllt. Die Lösung lautet also $y(x) = \tan(\ln|x|)$.

(G 2) Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen
Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = \cos^2\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} .$$

a) Setze $f(z) := \cos^2 z + z$ und verwende die Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ (im Buch Seite 14). Dann ist

$$\ln|x| + c = \int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \tan z$$

und nach z aufgelöst $z(x) = \arctan(\ln|x| + c)$ und zurücksubstituiert $y(x) = xz(x) = x\arctan(\ln|x| + c)$

b) Für $y(1) = \frac{\pi}{4}$ muss $\frac{\pi}{4} = \arctan(c)$ sein, also $c = 1$. Die Lösung ist $y(x) = x\arctan(\ln|x| + 1)$.

(G 3) Variation der Konstanten
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \frac{xy}{x+1} + e^x .$$

a) Setze $p(x) = \frac{x}{x+1}$ und $r(x) = e^x$ und verwende Satz 2.1 (Buch, Seite 16). Es ist $P(x) = \int p(x)dx = x - \ln(x+1)$. Weiter ist

$$\int r(x)e^{-P(x)}dx = \int e^x e^{-x}(x+1)dx = \frac{1}{2}x^2 + x .$$

Damit ist die allgem. Lösung gegeben durch

$$y(x) = e^{P(x)}\left(c + \int r(x)e^{-P(x)}dx\right) = \frac{e^x}{x+1}(c + \frac{1}{2}x^2 + x) .$$

b) Für $y(0) = 5$ muss $c = 5$ sein, die Lösung lautet $y(x) = \frac{e^x}{x+1}(5 + \frac{1}{2}x^2 + x)$.

(G 4) Exakte Differentialgleichung
Setze $f(x, y) = 6x^5 - 3x^2y^2$ und $g(x, y) = 4y^3 - 2x^3y$, so ist $f_y = -6x^2y = g_x$, also die Differentialgleichung exakt. Wir berechnen (Buch, Satz 2.5, Seite 20)

$$u(x, y) = \int_0^x f(s, y)ds + \int_0^y g(0, s)ds = \int_0^x (6s^5 - 3s^2y^2)ds + \int_0^s (4s^3)ds = x^6 - x^3y^2 + y^4 .$$

Die Lösung ist dann implizit gegeben durch $u(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

(H 1) Trennung der Variablen

a) Wir beachten $y' = \frac{x}{y}e^{x-y^2} = \frac{x}{y}e^x e^{-y^2}$ und rechnen

$$\int ye^{y^2}dy = \int xe^x dx .$$

Im linken Integral substituiert man $u = y^2$ und im rechten integriert man partiell und erhält

$$\frac{1}{2}e^{y^2} = xe^x - e^x + c$$

und nach y aufgelöst

$$y = y(x) = \pm\sqrt{\ln(2xe^x - 2e^x + 2c)} = \pm\sqrt{\ln 2 + \ln(xe^x - e^x + c)} .$$

b) Für $y(1) = 1$ muss $c = \frac{1}{2}e$ sein. Die Lösung ist dann

$$y = y(x) = \sqrt{\ln(2xe^x - 2e^x + e)} .$$

(H 2) Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen
Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x}(\ln y - \ln x + 1) .$$

a) Wir beachten $\ln y - \ln x = \ln \frac{y}{x}$ und setzen $f(z) := z(\ln z + 1)$. Die Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ (im Buch Seite 14) liefert

$$\ln|x| + c_1 = \int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dz}{z \ln z} = \ln(\ln z)$$

und nach z aufgelöst $z(x) = e^{cx}$ und $y(x) = xz(x) = xe^{cx}$.

b) Für $y(2) = 2$ muss $c = 0$ sein, also $y(x) = x$.

(H 3) Variation der Konstanten
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \frac{2xy}{x^2 + 1} + x^2 .$$

a) Setze $p(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ und $r(x) = x^2$ und verwende Satz 2.1 (Buch, Seite 16). Es ist $P(x) = \int p(x)dx = \ln(x^2+1)$. Weiter ist

$$\int r(x)e^{-P(x)}dx = \int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int (1 - \frac{1}{x^2+1})dx = x - \arctan x \ .$$

Damit ist die allgem. Lösung gegeben durch

$$y(x) = e^{P(x)}\Big(c + \int r(x)e^{-P(x)}dx\Big) = (x^2+1)(c + x - \arctan x) \ .$$

b) Es ist $y(1) = (1 - \arctan 1 + c)2 = (1 - \frac{\pi}{4} + c)2 = 2$ Also muss $c = \frac{\pi}{4}$ sein und die Lösung ist $y(x) = (x - \arctan x + \frac{\pi}{4})(x^2+1)$.

(H 4) Exakte Differentialgleichung

Setze $f(x,y) = 4x^3y^2 + y^6$ und $g(x,y) = 2x^4y + 6xy^5$, so ist $f_y = 8x^3y + 6y^5 = g_x$, also die Differentialgleichung exakt. Wir berechnen (Buch, Satz 2.5, Seite 20)

$$u(x,y) = \int_0^x f(s,y)ds + \int_0^y g(0,s)ds = \int_0^x (4s^3y^2 + y^6)ds = x^4y^2 + xy^6 \ .$$

Die Lösung ist dann implizit gegeben durch $u(x,y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$.