(Testfragen)
Nur y_1 und y_3 sind Lösungen, die anderen nicht.

(G 1) Trennung der Variablen

a) In der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{x}$ bringt man alles mit y auf die linke Seite, alles mit x auf die rechte Seite und integriert

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

Es folgt

$$\arctan(y) = \ln|x| + c\ .$$

Nach y umgestellt

$$y = y(x) = \tan(\ln|x| + c)\ .$$

b) Es ist

$$0 = y(-1) = \tan(\ln 1 + c) = \tan(c)\ .$$

Das ist für $c = 0$ erfüllt. Die Lösung lautet also $y(x) = \tan(\ln|x|)$.

(G 2) Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen
Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = \cos^2\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}\ .$$

a) Setze $f(z) := \cos^2 z + z$ und verwende die Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ (im Buch Seite 14). Dann ist

$$\ln|x| + c = \int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \tan z$$

und nach z aufgelöst $z(x) = \arctan(\ln|x| + c)$ und zurücksubstituiert $y(x) = xz(x) = x\arctan(\ln|x| + c)$

b) Für $y(1) = \frac{\pi}{4}$ muss $\frac{\pi}{4} = \arctan(c)$ sein, also $c = 1$. Die Lösung ist $y(x) = x\arctan(\ln|x| + 1)$.

(G 3) Variation der Konstanten
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \frac{xy}{x+1} + e^x\ .$$

a) Setze $p(x) = \frac{x}{x+1}$ und $r(x) = e^x$ und verwende Satz 2.1 (Buch, Seite 16). Es ist $P(x) = \int p(x)dx = x - \ln(x+1)$. Weiter ist

$$\int r(x)e^{-P(x)}dx = \int e^x e^{-x}(x+1)dx = \frac{1}{2}x^2 + x\ .$$

Damit ist die allgem. Lösung gegeben durch

$$y(x) = e^{P(x)}\Big(c + \int r(x)e^{-P(x)}dx\Big) = \frac{e^x}{x+1}(c + \frac{1}{2}x^2 + x)\ .$$

b) Für $y(0) = 5$ muss $c = 5$ sein, die Lösung lautet $y(x) = \frac{e^x}{x+1}(5 + \frac{1}{2}x^2 + x)$.

(G 4) Exakte Differentialgleichung
Setze $f(x, y) = 6x^5 - 3x^2y^2$ und $g(x, y) = 4y^3 - 2x^3y$, so ist $f_y = -6x^2y = g_x$, also die Differentialgleichung exakt. Wir berechnen (Buch, Satz 2.5, Seite 20)

$$u(x, y) = \int_0^x f(s, y)ds + \int_0^y g(0, s)ds = \int_0^x (6s^5 - 3s^2y^2)ds + \int_0^s (4s^3)ds = x^6 - x^3y^2 + y^4 \ .$$

Die Lösung ist dann implizit gegeben durch $u(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$.