

(Testfragen)

Welche der folgenden Funktionen

$$y_1(x) = \sin x \quad , \quad y_2(x) = x^2 \quad , \quad y_3(x) = e^{-x} \quad \text{und} \quad y_4(x) = \ln x$$

ist Lösung der Differentialgleichung $y'''(x) + y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$?

(G 1) Trennung der Variablen

a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{1 + y^2}{x} .$$

b) Welche Lösung genügt der Anfangsbedingung $y(-1) = 0$?

(G 2) Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = \cos^2\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} .$$

a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

b) Welche Lösung hat den Anfangswert $y(1) = \frac{\pi}{4}$?

(G 3) Variation der Konstanten

Für $x > -1$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$y' = \frac{xy}{x+1} + e^x .$$

a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

b) Welche Lösung genügt der Anfangsbedingung $y(0) = 5$?

(G 4) Exakte Differentialgleichung

Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$6x^5 - 3x^2y^2 + (4y^3 - 2x^3y)y' = 0 .$$

exakt ist und ermitteln Sie die Lösungen.

(H 1) Trennung der Variablen

a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{x}{y} e^{x-y^2} .$$

b) Welche Lösung genügt der Anfangsbedingung $y(1) = 1$?

(H 2) Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x} (\ln y - \ln x + 1) .$$

a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

b) Welche Lösung hat den Anfangswert $y(2) = 2$?

(H 3) Variation der Konstanten

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \frac{2xy}{x^2 + 1} + x^2 .$$

a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

b) Welche Lösung genügt der Anfangsbedingung $y(1) = 2$?

(H 4) Exakte Differentialgleichung

Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$(4x^3y^2 + y^6) + (2x^4y + 6xy^5)y' = 0$$

exakt ist und ermitteln Sie die Lösungen.