

## Mathematik II für ET, WI(ET), ET(LAB), SpoInf, IKT, CE, EPE, IST

### Übung 12

#### Gruppenübung

#### G31: (Wege in $\mathbb{R}^n$ )

Wir betrachten den Weg

$$X(t) = \frac{1}{2}e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ und den Graphen der Funktion}$$

$$y(x) = \frac{x^2}{2p}, \quad x \in [0, 1], \text{ d.h. den Weg } (x, y(x)).$$

- Skizzieren Sie diese Wege.
- Berechnen Sie die Länge der Wege und die Tangentialvektoren in jeden Punkt der Wege.

#### G32: (Wegintegrale I)

Berechnen Sie das Wegintegral des Vektorfelds

$$F(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

längs des einmal positiv durchlaufenen Einheitskreises  $W$  um  $(0, 0)$ .

**G33: (Wegintegrale II)** Sei  $W$  der geschlossene stückweise glatte Weg, der sich aus den Geradenstücken zwischen den Punkten  $(0, 0)$  und  $(2, 0)$ ,  $(2, 0)$  und  $(2, 1)$  und  $(0, 1)$ ,  $(0, 1)$  und  $(0, 0)$  zusammensetzt und in dieser Reihenfolge durchlaufen wird. Gegeben sei das Vektorfeld  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $F(x, y) = (xy, ye^x)$ .

- Skizzieren Sie den Weg  $W$ .
- Berechnen Sie das Wegintegral  $\int_w F \cdot dx$ .
- Wir betrachten jetzt den geschlossenen Weg  $W_1$ , der die Punkte  $(0, 0)$  und  $(2, 0)$ ,  $(2, 0)$  und  $(2, -1)$ ,  $(2, -1)$  und  $(0, 0)$  verbindet und in dieser Reihenfolge durchlaufen wird. Berechnen Sie das Integral  $\int_{W_1} F \cdot dX$  und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis von b). Sind die beiden Integrale gleich?