Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Annett Keller
Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
23.06.06

Mathematik II für ET, WI(ET), ET(LAB), SpoInf, IKT, CE, EPE, IST

Übung 10

Gruppenübung

G25: (Extremwertbestimmung I)

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)\cos(x + 2y).$$

Zeigen Sie, dass $(0,0)$ ein stationärer Punkt, d.h. eine Nullstelle von ∇f, von f ist. Ist $(0,0)$ Extremum? Welchen Typ hat das Extremum?

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

mit $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 2\pi\}$.

Besitzt die Funktion f ein relatives Minimum oder Maximum im Innern von $D(f)$? Hat die Funktion f ein globales Extremum in $D(f)$?

G26: (Implizite Funktionen)

Wir betrachten die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = e^{x-y} + x^2 - y - 1.$$

Ist die implizite Gleichung $g(x,y) = 0$ nach y auflösbar in $(0,0)$? Finden Sie dy/dx in $(0,0)$.

G27: (Extremwertbestimmung II)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \exp(xy + x - y)$$

auf $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4, x - 4 \leq y \leq 0\}$.

Untersuchen Sie die Funktion f auf relative Extremalstellen oder Sattelpunkte im Innern von $D(f)$ und bestimmen Sie deren Typ. Diskutieren Sie das Verhalten von f auf dem Rand von $D(f)$ und ermitteln Sie die globalen Extemalstellen von f auf ganz $D(f)$.

Hausübung

H25: (Extremwertbestimmung I)

Finden Sie Maxima, Minima und Sattelpunkte von

$$z = (x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)/2}.$$

H26: (Inverse Funktionen)

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to E \subset \mathbb{R}^n$, die eine stetig differenzierbare Inverse besitzt. D und E seien offen. Zeigen Sie, dass die Beziehung $\det J_{f^{-1}}(y)|_{y=f(x)} = 1/\det J_f(x)$ gilt.

H27: (Extremwertbestimmung II)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y, \quad x \neq 0,\ y \neq 0.$$

Bestimmen Sie alle relativen Extrema von f und deren Typ.

Besitzt die Funktion ein absolutes Maximum oder Minimum auf den Quadranten mit $x > 0, y < 0$ und $x < 0, y > 0$?

Hinweis:

Betrachten Sie dazu das Verhalten von f für $(x,y) \to (x, 0-)$ bzw. $(x,y) \to (0+, y)$ und für $(x,y) \to (0-, y)$ bzw. $(x,y) \to (x, 0+)$.