

## Mathematik II für ET, WI(ET), ET(LAB), SpoInf, IKT, CE, EPE, IST

### Übung 9

#### Gruppenübung

#### G22: (Kettenregel und Richtungsableitung)

- a) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x, y) = x^2 - xy$$

und

$$\phi(t) = (\sin t, 1/2(t+1)^2).$$

Bestimmen Sie die Ableitung von  $f(\phi(t))$  mit Hilfe der Kettenregel.

- b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \exp r^\lambda, \quad r = \|x\|, \quad \lambda \neq 0$$

mit  $D(f) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Bestimmen Sie den Gradient von  $f$ , die Richtung des steilsten Anstiegs im Punkt  $(1, 1, 1, \dots, 1)$  und die Richtungsableitung in diese Richtung.

#### G23: (Fehlerrechnung)

Wir betrachten die Funktionen

$$f(x) = 4x_1x_2^3x_3^{-1}x_4^{-4} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $D(f) = \{x : x_i > 0, i = 1, 2, 3, 4\}$ .

- a) Berechnen Sie die Ableitung von  $f$ .
- b) Schätzen Sie den Betrag  $|\Delta f/f|$  des maximalen *relativen Fehlers* von  $f$  im Punkt  $(130, 50, 2, 2)$  für die Messfehler  $\Delta x_1 = 0.65; \Delta x_2 = 0.5; \Delta x_3 = 0.06; \Delta x_4 = 0.02$  ab.

#### G24: (Taylorentwicklung)

Entwickeln Sie die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch

$$f(x, y) = e^{2y} \cos(x + y),$$

in ein Taylorpolynom 2. Grades  $T_2(x, y)$  mit Entwicklungspunkt  $(0, 0)$ .

Berechnen Sie hieraus eine Näherung für  $f(x_o, y_o)$  mit  $x_o = y_o = 0.1$ .

## Hausübung

**H22:** Es seien  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Funktionen

$$f(x, y, z) = e^{-2x} \sin 3xy - z, \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} x \sin y \\ x^2 + y^2 \\ y \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x, y) = f(g(x, y))$ , sowie den Gradienten von  $h$  (mit und ohne Kettenregel).

**H23:** Gegeben sei die Funktion

$$z = f(x, y) = e^{-(9x^2+4y^2)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Bestimmen Sie die geometrische Gestalt der Höhenlinien von  $f$  und skizzieren Sie diese.
- Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs im Punkt  $(1, 2)$ . Wie groß ist die Richtungsableitung in diese Richtung?
- Gegeben Sie die Tangentialebene an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(1, 2)$  an.

**H24:** Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x, y) = x^3 \ln(xy), \quad x > 0, y > 0.$$

- Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades  $T_2(x, y)$  um den Entwicklungspunkt  $(1, 1)$ .
- Schätzen Sie den Fehler von  $T_2(x, y)$  an der Stelle  $(1, 0.9)$  nach oben ab.