

## Mathematik II für ET, WI(ET), ET(LAB), SpoInf, IKT, CE, EPE, IST

### Übung 8

#### Gruppenübung

#### G18: (Topologie)

Skizzieren Sie die Mengen

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) < 2\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2, y \leq 3\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\}$$

und geben Sie jeweils (mit Begründung) an, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt sind. Bestimmen Sie außerdem jeweils die abgeschlossene Hülle der Menge.

#### G19: (Stetigkeit)

Wir betrachten die Funktionen

$$f_1(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f_2(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sind  $f_1$  und  $f_2$  stetig? Sind  $f_1, f_2$  in  $(0, 0)$  fortsetzbar?

#### G20: (Höhenlinien)

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = 4 - 4((x - 1)^2 + (y + 1)^2).$$

Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  heißt die Menge  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$  Höhenlinie zum Niveau  $c$ .

- Bestimmen Sie die geometrische Gestalt der Höhenlinien von  $f$  und skizzieren Sie diese.
- Berechnen Sie den Gradienten und alle partielle Ableitungen zweiter Ordnung von  $f$ . Gilt  $f_{xy} = f_{yx}$ ?

## Hausübung

**H18:** Überprüfen Sie, dass die Grenze

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2}$$

nicht existiert, d.h. die Funktion  $f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2}$  ist nicht stetig in  $(0, 0)$  fortsetzbar.

**H19:** Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Berechnen Sie  $f_x$  und  $f_y$  für  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Gilt die Beziehung  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ ?
- Zeigen Sie, dass  $f_{xy}(0, 0) = -1$  und  $f_{yx}(0, 0) = 1$ . Warum sind diese zweiten Ableitungen nicht gleich?

**H20:** Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y, z) = e^{-(x^2 + 6xy - 2y^2 - 2yz + z^2)}.$$

Bestimmen Sie die geometrische Gestalt der Höhenlinien von  $f$  zum Niveau  $c = 1$ .