Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Annett Keller
Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

19.05.2006

Mathematik II für ET, WI(ET), ET(LAB), SpoInf, IKT, CE, EPE, IST
5. Übung

Gruppenübung

G 13 Rang, Kern einer Matrix

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie den Rang von A in Abhängigkeit von λ. Welche Dimension besitzt der Kern von A (in Abhängigkeit von λ)? Geben Sie jeweils eine Basis des Kernes an.

G 14 Determinante

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

G 15 Inverse Matrix

(i) Berechnen Sie mit Hilfe der Adjungierten die Inverse der Matrix A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbare Matrizen. Zeigen Sie

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Hausübung

H 13 Cramersche Regel

Berechnen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 \qquad - 3x_3 &= 2 \\ 2x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

H 14 Determinante

Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

H 15 Gleichungssysteme

Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungssyteme $A_i \cdot \vec{x} = \vec{b}_i$, $i = 1, 2, 3$, lösbar sind.

$$(i) \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & \pi & 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Um diese Aufgabe lösen zu können, müssen Sie NICHT die Lösungen der einzelnen Gleichungssysteme bestimmen.