Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Annett Keller
Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

12.05.2006

Mathematik II für ET, WI(ET), ET(LAB), SpoInf, IKT, CE, EPE, IST

4. Übung

Gruppenübung

G 10 Matrizen

(i) Seien $A \in \mathbb{R}^{3,2}$ und $B \in \mathbb{R}^{2,3}$ Matrizen, gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie AB und $(B\vec{e}_4)(B\vec{e}_4)^T$, wobei $\vec{e}_4 = (1,0,0,0)^T$.

(ii) Sei $C \in \mathbb{R}^{3,4}$ eine Matrix, gegeben durch

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie durch geeignete Zeilen- und Spaltenumformungen den Rang von C.

G 11 Determinante

Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \mu \cdot a_{13} \\ a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \mu \cdot a_{23} \\ a_{31} & \lambda \cdot a_{32} & \mu \cdot a_{33} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \mu \cdot \det A.$$

(ii) Sei $B \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ -4 & b & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, daß $\det B = 0$ gilt.

G 12 Permutationen

Bestimmen Sie die Vorzeichen der folgenden Permutationen der Zahlen 1,2,3,4.

(i) 1432

(ii) 1324

(iii) 4123

(iv) 3241

Hausübung

H 10 Matrizenrechnung

(i) Seien $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C \in \mathbb{R}^{n,n}$. Welche der folgenden Ausdrücke ist definiert? Geben Sie im Falle der Existenz die Größe $M \times N$, $M, N \in \mathbb{N}$ der Ergebnismatrix an.

(a)	$A + B$	(e)	$B^T A$
(b)	$A + C$	(f)	$BA + C$
(c)	$B^T + A$	(g)	ACB
(d)	$AB.$		

(ii) Finden Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2,2}$, so daß gilt:

$$AB \neq BA.$$

H 11 Determinanten

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad (ii)$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1/3 & 4 \\ -1 & 4/9 & 0 \\ -3 & 2/9 & -2 \end{pmatrix}$

(iii) $C = A^T$ $\qquad (iv)$ $D = A \cdot A$

(v) $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

H 12 Determinante, Rang einer Matrix

(i) Seien $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$ und $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ die Matrix, deren Spaltenvektoren gleich $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sind (in genannter Reihenfolge). Zeigen Sie

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det A.$$

(ii) Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ Spaltenvektoren, $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ und $B = \vec{u} \cdot \vec{v}^T$. Zeigen Sie, daß die Matrix B Rang 1 hat.