Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Annett Keller
Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

05.05.2006

Mathematik II für ET, WI(ET), ET(LAB), SpoInf, IKT, CE, EPE, IST

3. Übung

Gruppenübung

G 7 Untervektorraum

Gegeben seien die folgenden Mengen in $\mathbb{R}^3$:

$$A = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{R}^3 : \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B_\alpha = \left\{ \vec{b} \in \mathbb{R}^3 : \vec{b} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R} \right\}, \alpha \in \mathbb{R} \text{ fest.}$$

(i) Zeigen Sie, daß A ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) Welche Dimension kann B_α maximal besitzen? Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\dim B_\alpha = 0$ bzw. $\dim B_\alpha = 1$?

G 8 Lineare Funktion

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Funktion, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie den Kern und das Bild von f an. Bestimmen Sie die jeweilige Dimension. Ist f injektiv bzw. surjektiv?

G 9 Untervektorraum

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen U_i, $i = 1, \ldots, 5$, Untervektorräume der Vektorräume V_i, $i = 1, \ldots, 5$, sind. Skizzieren Sie U_1, U_2, U_3.

(*i*) $V_1 = \mathbb{R}^3$, $\quad U_1 = \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3 : u_1 = u_2 = u_3 = 0 \}$

(*ii*) $V_2 = \mathbb{R}^2$, $\quad U_2 = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^2 : \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, 0 \le t \le 2\pi \right\}$

(*iii*) $V_3 = \mathbb{R}^2$, $\quad U_3 = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^2 : \vec{u} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{u} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R} \right\}$

(*iv*) $V_4 = \mathbb{R}^3$, $\quad U_4 = \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3 : 3u_3 = 2(u_1 - u_2) + 5 \}$

(*v*) $V_5 = \mathbb{R}^3$, $\quad U_5 = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3 : 0 = \left[\vec{u} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Hausübung

H 7 Lineare Unabhängigkeit

Seien M_1, M_2, M_3 Mengen von je 3 Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Überprüfen Sie, z.B. mit Hilfe von Aussagen aus §8, diese Vektoren bzgl. linearer Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit.

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

H 8 Vektor- und Skalarprodukt

Seien $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

(i) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

(ii) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.

H 9 Untervektorraum

Durch die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

wird im Raum $\mathbb{R}^4$ der Unterraum $U =< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} >$ aufgespannt. Geben Sie die Dimension dieses Unterraumes und eine Basis an.