Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Annett Keller
Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

28.04.2006

Mathematik II für ET, WI(ET), ET(LAB), SpoInf, IKT, CE, EPE, IST
2. Übung

Gruppenübung

G 1 Fouriereihe

Sei die 2π-periodische Funktion f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x < \pi \\ 0 & \pi \le x < 2\pi. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die komplexe Fourierreihe

$$FR(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

G 2 Fourierreihe

(i) Sei f eine stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion und

$$FR(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

die zugehörige Fourierreihe in komplexer Schreibweise. Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten d_n von f'.

(ii) Sei f stetig und

$$FR(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

die zugehörige Fourierreihe in komplexer Schreibweise, wobei $c_0 = 0$ gelten soll. Sei

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Zeigen Sie, daß F 2π-periodisch ist und berechnen Sie die Fourierkoeffizienten g_n von F.

G 3 Spatprodukt

(i) Berechnen Sie das Volumen der von den 3 folgenden Vektoren gebildeten Pyramide

$$\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \qquad \vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \qquad \vec{c} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Hinweis: Wie verhalten sich die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ zueinander? Das Volumen einer Pyramide berechnet sich gemäß $V = \frac{1}{3}Gh$ (G ist die Grundfläche, h ist die Höhe).

(ii) Wie hängt das von den folgenden 3 Vektoren aufgespannte Spatvolumen von $x \in \mathbb{R}$ ab? Warum?

$$\vec{a} = \frac{\vec{e}_1 - \vec{e}_2}{2}, \qquad \vec{b} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \qquad \vec{c} = 2\vec{e}_2 - x\vec{e}_3$$

Hausübung

H 1 Fourierreihe

Sei f eine 2π-periodische Funktion und gegeben durch

$$f(x) = \sin\tfrac{x}{2} \qquad 0 \leq x < 2\pi.$$

(i) Skizzieren Sie diese Funktion und zeigen Sie, daß sie gerade ist.

(ii) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe FR der Funktion f.

Hinweis: $\int \sin(ax)\cos(bx)dx = \frac{b}{b^2-a^2}\sin(ax)\sin(bx) + \frac{a}{b^2-a^2}\cos(ax)\cos(bx)$

H 2 Fourierreihe

Sei f eine stückweise stetige, 2π-periodische Funktion und

$$FR(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

die dazugehörige Fourierreihe in komplexer Schreibweise. Zeigen Sie, daß ein $M \in \mathbb{R}_+$ existiert, so daß $|c_n| < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Fourierkoeffizienten sind beschränkt.

H 3 Ebenendarstellung

Seien E_1 und E_2 zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\-1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix} = 0, \qquad E_2 : 2x + y = -z.$$

(i) Stellen Sie E_1 und E_2 in Hessescher Normalform dar, d.h. finden Sie einen Ortsvektor $\vec{x}_0$ und einen Normalenvektor $\vec{n}$, so daß die Ebene durch folgende Gleichung beschrieben werden kann:

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{x}_0 \cdot \vec{n}.$$

(ii) Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen.

(iii) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $(-4, 11, 1)$ von E_1.

Hinweis: Die zugehörigen Definitionen und Sätze finden Sie in *von Finckenstein, Lehn, Schellhaas, Wegmann; Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure, Bd 1, 2.Auflage*, S.94ff