**Definition 9.1** *Eine Menge $V$ heißt* **linearer Raum** *(oder* **Vektorraum***)* **über** $\mathbb{R}$, *wenn gilt:*

I. *Zwischen den Elementen von $V$ ist eine Addition „+“ erklärt mit folgenden Regeln:*

a) *Mit $u, v \in V$ ist auch $u + v \in V$ .*

$$\left.\begin{array}{lll} b) & u+v=v+u & \textit{(Kommutativgesetz)} \\ c) & (u+v)+w=u+(v+w) & \textit{(Assoziativgesetz)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{für alle} \\ u,v,w \in V\ . \end{array}$$

d) *Es existiert genau ein „Nullelement“ $0 \in V$ mit*

$$0 + u = u \quad \textit{für alle} \quad u \in V\ .$$

e) *Zu jedem $u \in V$ existiert genau ein „negatives Element“ $-u \in V$ mit $u + (-u) = 0$.*

II. *Zwischen den Elementen von $V$ und den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist eine Multiplikation „·“ erklärt mit folgenden Regeln:*

f) *Mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in V$ ist $\alpha \cdot u \in V$.*

$$\left.\begin{array}{lll} g) & \alpha\cdot(u+v)=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v & \textit{(1.Distributivgesetz)} \\ h) & (\alpha+\beta)\cdot u=\alpha\cdot u+\beta\cdot u & \textit{(2. Distributivgesetz)} \\ i) & (\alpha\beta)\cdot u=\alpha\cdot(\beta\cdot u) & \textit{(Assoziativgesetz)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{für alle} \\ \alpha,\beta \in \mathbb{R} \textit{ und} \\ u,v \in V\ . \end{array}$$

k) $1 \cdot u = u$ *für alle* $u \in V$.

*Die Elemente von $V$ heißen* **Vektoren**. *Die reellen Zahlen werden* **Skalare** *genannt.*