Definition 36.1 *Seien* $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *und* $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *zwei Punkte im* $\mathbb{R}^n$ *mit* $a_i \le b_i,\ i = 1, \ldots, n$.

(i) *Für das abgeschlossene Intervall*

$$I = [A, B] = \{X \in \mathbb{R}^n : \ X = (x_1, \ldots, x_n),\ a_i \le x_i \le b_i \\ \text{für } i = 1, \ldots, n\}$$

des $\mathbb{R}^n$ *heißt*

$$\mu(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

das **Maß** *von* $[A, B]$.

(ii) *Eine Menge* $Z = \{I_1, \ldots, I_m\}$ *von nicht überlappenden abgeschlossenen Intervallen des* $\mathbb{R}^n$ *mit*

$$I = [A, B] = \bigcup_{k=1}^{m} I_k$$

heißt eine **Zerlegung** *von* $[A, B]$. *Dabei heißen zwei Teilintervalle des* $\mathbb{R}^n$ *nicht überlappend, wenn sie höchstens Randpunkte gemeinsam haben.*

(iii) *Die Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sei beschränkt auf dem abgeschlossenen Intervall* $I \subset D(f)$. *Für eine Zerlegung* Z *nach (ii) seien für* $k = 1, \ldots, m$ *definiert*

$$m_k = \inf\{f(X) : \ X = (x_1, \ldots, x_n) \in I_k\}$$
$$M_k = \sup\{f(X) : \ X = (x_1, \ldots, x_n) \in I_k\}.$$

Dann heißen

$$s(Z) = \sum_{k=1}^{m} m_k \mu(I_k) \qquad \text{und} \qquad S(Z) = \sum_{k=1}^{m} M_k \mu(I_k)$$

die zur Zerlegung Z *(und zur Funktion* f*) gehörige* **Untersumme** *und* **Obersumme**.