

Es sollen alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems bestimmt werden:

$$\begin{aligned} 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 16 \\ -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= -2 \\ 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 14 \\ 4x_1 - x_2 - 9x_3 - 2x_4 - x_5 &= -5 \end{aligned}$$

1. Schritt: Die Reihenfolge der Gleichungen ist für die Lösungsmenge unerheblich. Wir stellen die Gleichungen so um, daß in der obersten Zeile (Kopfzeile) der Koeffizient von x_1 von Null verschieden ist, dies erreichen wir durch Vertauschen der ersten und der zweiten Zeile. Um unnötige Schreibarbeit zu vermeiden, stellen wir das umgestellte Gleichungssystem gleich schematisch dar:

$$\begin{array}{ccccc|c} -3 & -3 & 3 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ 4 & -1 & -9 & -2 & -1 & -5 \end{array}$$

2. Schritt: *Normierung der Kopfzeile*. Multiplikation einer Zeile mit einem von Null verschiedenen Faktor ändert die Lösungsmenge nicht. Wir multiplizieren die erste Zeile mit $-\frac{1}{3}$ und erhalten

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ 4 & -1 & -9 & -2 & -1 & -5 \end{array}$$

3. Schritt: *Elimination von x_1 aus allen Gleichungen bis auf die erste*. Wir subtrahieren das vierfache der Kopfzeile von der letzten und erhalten

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ 0 & -5 & -5 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{23}{3} \end{array}$$

4. Schritt: *Normierung der Kopfzeile im Restsystem.* Durch Multiplikation der ersten verbleibenden Zeile mit $\frac{1}{4}$ erhalten wir das Restsystem

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{23}{3} \end{array}$$

5. Schritt: *Elimination von x_2 aus den letzten beiden Gleichungen.* Wir subtrahieren das zweifache der Kopfzeile von der zweiten und addieren das fünffache der Kopfzeile zur dritten. Ergebnis:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array}$$

6. Schritt: Die Koeffizienten von x_3 sind zufälligerweise Null. Wir lassen im folgenden alles unverändert bis auf das Restsystem

$$\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array}$$

7. Schritt: *Normierung der Kopfzeile ergibt*

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array}$$

8. Schritt: *Elimination von x_4 .* Subtraktion des $\frac{37}{12}$ -fachen der Kopfzeile von der letzten ergibt das Schema

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

9. Schritt: *Die Zeilenstufenform.* Wir fassen das Ergebnis der Umformungen schematisch zusammen:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Diesem Schema entsprechen die umgeformten Gleichungen

$$x_1 + x_2 - x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 = \frac{2}{3}$$

$$x_2 + x_3 + \frac{3}{4}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 4$$

$$x_4 - 2x_5 = 4.$$

4.2 Auflösung der Gleichungen in Zeilenstufenform

In den zuletzt notierten Gleichungen sind zwei Unbekannte frei wählbar, beispielsweise x_3 und x_5 . Wir setzen $x_3 = s$, $x_5 = t$ willkürlich fest und rollen die Gleichungen von hinten her auf.

Aus der letzten folgt $x_4 = 4 + 2t$. Setzen wir dies in die vorletzte Gleichung ein, so erhalten wir $x_2 = 1 - s - t$.

Gehen wir damit in die erste Gleichung, so erhalten wir $x_1 = 1 + 2s + t$. Damit ergibt sich der allgemeine Lösungsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daß alle diese Vektoren das ursprüngliche System befriedigen, wird in 4.6 begründet. Die Lösungsmenge ist also eine Ebene im fünfdimensionalen Raum.