Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. E. Hartmann
Susanne Moritz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10./11./13.7.2006

Mathematik II für Chemiker und LaB, Übung 7

Gruppenübung

G 19 Gegeben sei das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + y_2 + e^{2x} \\ y_2' &= 2y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystemes.

b) Ermitteln Sie nun die allgemeine Lösung des inhomogenen Systemes.

c) Welche Lösung des inhomogenen Systemes genügt den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 0$?

G 20 Es sei G das Rechteck mit den Eckpunkten $P = (0,1)$, $Q = (0,3)$, $R = (1,3)$ und $S = (1,1)$. Berechnen Sie folgende Gebietsintegrale

a) $\iint\limits_G \left(\frac{y}{x+1} + \frac{x}{y}\right) dx\ dy$

b) $\iint\limits_G e^{y+x}\, dx\ dy$

G 21 Gegeben sei das Gebiet

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2\ ,\ x \le y \le x^2 + 1\}$$

a) Skizzieren Sie das Gebiet G.

b) Berechnen Sie das Integral $\iint\limits_G \frac{x}{y^2}\, dx\ dy$.

Mathematik II für Chemiker und LaB
Übung 7, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 19 Gegeben sei das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + y_2 + e^{2x} \\ y_2' &= 2y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystemes.

b) Ermitteln Sie nun die allgemeine Lösung des inhomogenen Systemes.

c) Welche Lösung des inhomogenen Systemes genügt den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 0$?

a) *Die Matrix* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *besitzt das char. Polynom* $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$. *Die Eigenwerte sind also* 1 *und* 4 *und die zugehörigen Eigenvektoren* $(1, -2)^\top$ *zu* 1 *und* $(1, 1)^\top$ *zu* 4. *Die allgemeine Lösung des homogenen Systemes lautet*

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) *Zur speziellen Lösung* $y(x)$ *des inhomogenen Systemes:*
Ansatz vom Typ der rechten Seite $y(x) = (a, b)^\top e^{2x}$. *Dann folgt*

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} e^{2x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + b + 1 \\ 2a + 2b \end{pmatrix} e^{2x}$$

und damit $2a = 3a + b + 1$ *und* $2b = 2a + 2b$. *Daraus folgt* $a = 0$ *und* $b = -1$ *und die spezielle Lösung lautet* $y(x) = (0, -1)^\top e^{2x}$. *Die allgemeine Lösung ist damit*

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

c) *Es ist*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y(0) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - 2c_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $c_1 = 1$ *und* $c_2 = 0$. *Die Lösung ist dann*

$$y(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

G 20 Es sei G das Rechteck mit den Eckpunkten $P = (0, 1)$, $Q = (0, 3)$, $R = (1, 3)$ und $S = (1, 1)$. Berechnen Sie folgende Gebietsintegrale

a) $\iint\limits_G \left(\frac{y}{x+1} + \frac{x}{y}\right) dx\, dy$

b) $\iint\limits_G e^{y+x}\, dx\, dy$

Es ist $G = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1 \ , \ 1 \le y \le 3\}$

a)

$$\iint_G \left(\frac{y}{x+1} + \frac{x}{y}\right)\, dx\ dy = \int_0^1 \int_1^3 \left(\frac{y}{x+1} + \frac{x}{y}\right)\, dy\ dx = \int_0^1 \left| \frac{1}{2}\frac{y^2}{x+1} + x \ln y \right|_1^3 dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4}{x+1} + x \ln 3\right) dx = \left| 4 \ln(x+1) + \frac{\ln 3}{2} x^2 \right|_0^1 = 4 \ln 2 + \frac{\ln 3}{2}$$

a)

$$\iint_G e^{x+y}\ dx\ dy = \int_0^1 \int_1^3 e^{x+y}\ dy\ dx = \int_0^1 \left| e^{x+y} \right|_1^3 dx$$

$$= \int_0^1 (e^{x+3} - e^{x+1}) dx = \left| e^{x+3} - e^{x+1} \right|_0^1 = e^4 - e^3 - e^2 + e$$

G 21 Gegeben sei das Gebiet

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2 \ , \ x \le y \le x^2 + 1\}$$

a) Skizzieren Sie das Gebiet G.

b) Berechnen Sie das Integral $\iint_G \frac{x}{y^2}\, dx\ dy$.

Es ist

$$\iint_G \frac{x}{y^2}\ dx\ dy = \int_1^2 \int_x^{x^2+1} \frac{x}{y^2}\ dy\ dx = \int_1^2 \left| -\frac{x}{y} \right|_x^{x^2+1} dx$$

$$= \int_1^2 \left(1 - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \left| x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right|_1^2 = 1 - \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)$$