Mathematik II für Chemiker und LaB
Übung 6, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 16 a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{1+y^2}{x} .$$

b) Welche Lösung erfüllt zusätzlich die Anfangsbedingung $y(-1) = 0$.

a) In der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{x}$ *bringt man alles mit* y *auf die linke Seite, alles mit* x *auf die rechte Seite und integriert*

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

Es folgt

$$\arctan(y) = \ln|x| + c .$$

Nach y *umgestellt*

$$y = y(x) = \tan(\ln|x| + c) .$$

b) Es ist

$$0 = y(-1) = \tan(\ln 1 + c) = \tan(c) .$$

Das ist für $c = 0$ *erfüllt. Die Lösung lautet also* $y(x) = \tan(\ln|x|)$.

G 17 Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' - \frac{xy}{x+1} = e^x$$

für $x > -1$.

a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an.

c) Welche Lösung der inhomogenen Gleichung genügt der Anfangsbedingung $y(0) = 5$?

a) Die homogene Gleichung $y' - \frac{xy}{x+1} = 0$ *löst man mittels Trennung der Variablen*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{x+1} = 0 \quad , \quad \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{x}{x+1} dx = \int (1 - \frac{1}{x+1}) dx$$

$$\ln|y| = x - \ln(x+1) + c_1$$

$$y(x) = \pm e^{c_1} \frac{e^x}{x+1} = c \frac{e^x}{x+1} \quad \textit{mit } c = \pm e^{c_1}$$

b) Ansatz der Variation der Konstanten liefert

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c(x)y_h(x) \quad \text{mit } y_h(x) = \frac{e^x}{x+1} \\
e^x &= y' - \frac{xy}{x+1} = c'y_h + c(y_h)' - c\frac{xy_h}{x+1} = c'y_h \\
c' &= \frac{e^x}{y_h} = x+1 \quad , \quad c(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + c_1 \\
y(x) &= (\frac{1}{2}x^2 + x + c_1)\frac{e^x}{x+1}
\end{aligned}
$$

c) Es ist $y(0) = c_1 = 5$, also $c_1 = 5$ und die Lösung ist $(\frac{1}{2}x^2 + x + 5)\frac{e^x}{x+1}$.

G 18 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

a) $y''' + y'' + y' + y = 0$

b) $y^{(5)} + y^{(4)} - 4y''' - 4y'' = 0$

c) $y''' - 3y' + 2y = \sin x$

d) $y''' - 3y' + 2y = e^x$

a) Das char. Polynom $p(\lambda) = \lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 = (\lambda+1)(\lambda^2+1)$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = \pm i$. Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = c_1e^{-x} + c_2\sin x + c_3\cos x$.

b) Das char. Polynom $p(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 - 4\lambda^3 - 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2-4)(\lambda+1)$ besitzt die Nullstellen $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$ und $\lambda_5 = -1$. Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x} + c_5e^{-x}$.

c) Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$ und hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = 1$ und $\lambda_3 = -2$. Die homogene Dgl. hat die Lösungen $y_h(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x}$.
Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$
\begin{aligned}
&y_s(x) = a\sin x + b\cos x \\
&\sin x = y_s''' - 3y_s' + 2y_s = (-a\cos x + b\sin x) - 3(a\cos x - b\sin x) + 2(a\sin x + b\cos x) \\
&= (-4a+2b)\cos x + (4b+2a)\sin x \\
&-4a + 2b = 0\ ,\ 4b + 2a = 1 \quad a = \frac{1}{10}\ ,\ b = \frac{1}{5} \\
&y(x) = y_s(x) + y_h(x) = \frac{1}{10}\sin x + \frac{1}{5}\cos x + c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x}
\end{aligned}
$$

d) Für die Lösung der homogenen DGL siehe c). Wir machen einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. $\lambda = 1$ ist doppelte Nullstelle, daher machen wir den Ansatz

$$
\begin{aligned}
&y_s(x) = ax^2e^x \quad , \quad y_s' = a(x^2+2x)e^x \\
&y_s'' = a(x^2+4x+2)e^x \quad , \quad y_s''' = a(x^2+6x+6)e^x \\
&e^x = y_s''' - 3y_s' + 2y_s = a(x^2+6x+6-6x-3x^2+2x^2)e^x = a6e^x \quad , \quad a = \frac{1}{6} \\
&y(x) = y_s(x) + y_h(x) = \frac{1}{6}x^2e^x + c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x}
\end{aligned}
$$