Mathematik II für Chemiker und LaB
Übung 5, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 13 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Inverse A^{-1} von A.

b) Lösen Sie nun die Gleichungssysteme

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Die Inverse lautet

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*b) Die Lösung von $Ax = b$ berechnet man über $x = A^{-1}b$.
Für $b = (1,2,1)$ ist $x = A^{-1}b = (3,-4,3)$, für $b = (3,1,2)$ und $x = A^{-1}b = (1,-1,1)$ und für $b = (2,4,-1)$ ist $x = (12,-20,-5)$.*

G 14 Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Welche der Vektoren b_1 bis b_4 sind Eigenvektoren der Matrix A?
Was sind die zugehörigen Eigenwerte?

Für $b_1 = (2,-1,1,3)$ ist $Ab_1 = (15,3,9,30)^T$ kein Vielfaches von b_1, also ist b_1 kein Eigenvektor.
Für $b_2 = (-1,2,1,0)$ ist $Ab_2 = 3b_2$, also ist b_2 Eigenvektor zum Eigenwert 3.
Für $b_3 = (4,2,1,0)$ ist $Ab_3 = (15,15,17,23)^T$ kein Vielfaches von b_3, also kein Eigenvektor.
Für $b_4 = (-5,2,7,4)$ ist $Ab_4 = b_4$, also ist b_4 ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

G 15 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Ermitteln Sie die Eigenwerte von A als Nullstellen des charakteristischen Polynomes.

c) Bestimmen Sie nun zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren.

a) *Das char. Polynom ist*

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)^3 + 6 + 6 - 9(2-\lambda) - 2(2-\lambda) - 2(2-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + \lambda - 6 \end{aligned}$$

b) *Es ist*

$$0 = \lambda^3 - 6\lambda^2 - \lambda + 6 = \lambda(\lambda^2-1) - 6(\lambda^2-1) = (\lambda^2-1)(\lambda-6) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-6) .$$

Die Eigenwerte sind $1, -1, 6$.

c) *Zum Eigenwert* 1*:*

$$(A - E)x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Setze $x_1 = 1$*, so folgt* $x_2 = -2$ *und* $x_3 = 1$*. Die Eigenvektoren sind also* $x = \lambda(1, -2, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zum Eigenwert -1*:*

$$(A + E)x = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Setze $x_1 = 1$*, so folgt* $x_2 = 0$ *und* $x_3 = -1$*. Die Eigenvektoren sind also* $x = \lambda(1, 0, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zum Eigenwert 6*:*

$$(A - 6E)x = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Setze $x_2 = 1$*, so folgt* $x_1 = x_3 = 2$*. Die Eigenvektoren sind also* $x = \lambda(2, 1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.