Mathematik II für Chemiker und LaB
Übung 4, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 10 a) Ermitteln Sie alle Lösungen $x = (x_1, x_2, x_3)$ des Gleichungssystemes

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 10\,. \end{aligned}$$

b) Ermitteln Sie alle Lösungen $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ des Gleichungssystemes

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 - 4x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 &= 5\,. \end{aligned}$$

a) *Wir bringen die erweiterte Matrix mittels Gauß Algorithmus in Stufenform*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet daher $x = (2, -2, 3)$.

b) *Die zweite Gleichung umgestellt* $x_4 = 2x_3 - x_1$, *in die dritte Gleichung eingesetzt, folgt* $5x_1 - 6x_3 = 4$. *Zusammen mit der ersten Gleichung folgt* $x_1 = 2, x_3 = 1$ *und* $x_4 = 0$. *Dies löst tatsächlich alle vier Gleichungen (Probe machen!). Da* x_2 *gar nicht auftaucht, ist es beliebig. Die Lösungen sind also* $x = (2, \lambda, 1, 0)$ *für jedes* $\lambda \in \mathbb{R}$.

G 11 Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie, falls möglich, folgende Summen $A + B$, $A + C$ und $B + C$.

b) Berechnen Sie, falls möglich, folgende Matrizenprodukte A^2, AB, BA, $B^T A$ und B^2.

c) Berechnen Sie die Matrizenprodukte AC und CA und vergleichen Sie die Ergebnisse.

a) *Es geht nur*

$$A + C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

die anderen Summen gibt es nicht, da die Matrizen unterschiedliche Formate haben.

b) Es geht

$$A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 10 \\ 10 & 9 & 10 \\ 10 & 10 & 14 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 16 & 10 & 11 & 13 \\ 13 & 7 & 8 & 11 \\ 12 & 10 & 9 & 11 \end{pmatrix} \quad B^T A = \begin{pmatrix} 16 & 13 & 12 \\ 10 & 7 & 10 \\ 11 & 8 & 9 \\ 13 & 11 & 11 \end{pmatrix},$$

die anderen Produkte gibt es nicht.

c) Es ist

$$AC = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 13 \\ 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 11 \end{pmatrix} \quad CA = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 14 & 10 & 10 \\ 13 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

G 12

Die Ergebnisse sind verschieden, also AC ist nicht gleich CA.

a) Es seien mit x_1, x_2, x_3 bzw. x_4 die Mengen bezeichnet, welche der Einkäufer von Legierung A, B, C bzw. D kauft.
Damit ergeben sich für eine Tonne Legierung folgende Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \quad \text{(Tonne Legierung)}$$
$$\frac{6}{100}x_1 + \frac{10}{100}x_2 + \frac{8}{100}x_3 + \frac{4}{100}x_4 = \frac{8}{100} \quad \text{(Magnesium-Anteil)}$$
$$\frac{7}{100}x_1 + \frac{3}{100}x_2 + \frac{13}{100}x_3 + \frac{1}{100}x_4 = \frac{6}{100} \quad \text{(Zink-Anteil)}$$

Löse das Gleichungssystem mit Gauß-Algorithmus

$$\left|\begin{array}{cccc|c|l} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 6 & 10 & 8 & 4 & 8 & -6\mathrm{I} \\ 7 & 3 & 13 & 1 & 6 & -7\mathrm{I} \end{array}\right. \to \left|\begin{array}{cccc|c|l} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 4 & 2 & -2 & 2 & :2 \\ 0 & -4 & 6 & -6 & -1 & +\mathrm{II} \end{array}\right.$$

$$\to \left|\begin{array}{cccc|c|} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 1 \end{array}\right.$$

Wähle $x_4 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, frei, damit

$$x_3 = \frac{1}{8} + x_4 = \frac{1}{8} + \lambda \qquad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{7}{16}$$

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 = \frac{7}{16} - 2\lambda$$

Somit allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\vec{x} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da es sich bei $x_1, \dots, x_4$ um Mengen handelt, muß gelten $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$. Daher

$$x_4 = \lambda \geq 0 \qquad (\text{damit gilt auch } x_3 \geq 0)$$

$$x_1 = \frac{7}{16} - 2\lambda \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{32} \geq \lambda$$

Also muß λ die Bedingung

$$0 \leq \lambda \leq \frac{7}{32}$$

erfüllen, damit $x_1, \dots, x_4 \geq 0$.

b) Der ~~Pre~~ Preis pro Tonne ist

$$1000\, x_1 + 1500\, x_2 + 2000\, x_3 + 500\, x_4$$

$$= 1000\left(\frac{7}{16} - 2\lambda\right) + 1500 \cdot \frac{7}{16} + 2000\left(\frac{1}{8} + \lambda\right) + 500\lambda$$

$$= \frac{5375}{4} + 500\lambda$$

Der Preis ist offensichtlich minimal für $\lambda = 0$, also ist

$$\vec{x} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die preisgünstigste Lösung.