Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. E. Hartmann
Susanne Moritz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

15./16./18.5.2006

Mathematik II für Chemiker und LaB, Übung 3

Gruppenübung

G 7 Es sei g die Gerade durch $P = (2, 1)$ und $Q = (3, 4)$ und h die Gerade, welche durch die Gleichung $3x + 4y + 20 = 0$ beschrieben wird.

a) Ermitteln Sie die Hesse-Normalform von g und eine Parameterdarstellung von h.

b) Berechnen Sie Schnittpunkt sowie Schnittwinkel der Geraden g und h.

c) Berechnen Sie den Abstand von P zu h.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten P, Q und dem Koordinatenursprung.

G 8 Es sei E die Ebene durch $P = (1, 2, 2)$, $Q = (1, 1, 1)$, $R = (3, 1, 0)$ und F die Ebene, welche durch die Gleichung $2x + 2y + z = 8$ beschrieben wird.

a) Ermitteln Sie die Hesse-Normalform von E und eine Parameterdarstellung von F.

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden von E und F an.

c) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Ebene F mit der Geraden durch P und Q.

G 9 Gegeben seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Ermitteln Sie alle Lösungen x des Gleichungssystemes $A_1 x = b$ und des Gleichungssystemes $A_2 x = b$.

Mathematatik II für Chemiker und LaB
Übung 3, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 7 Es sei g die Gerade durch $P = (2, 1)$ und $Q = (3, 4)$ und h die Gerade, welche durch die Gleichung $3x + 4y + 20 = 0$ beschrieben wird.

a) Ermitteln Sie die Hesse-Normalform von g und eine Parameterdarstellung von h.

b) Berechnen Sie Schnittpunkt sowie Schnittwinkel der Geraden g und h.

c) Berechnen Sie den Abstand von P zu h.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten P, Q und dem Koordinatenursprung.

a) *Ein Normalenvektor für g ist*

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Hesse-Normalform $\frac{1}{\sqrt{10}}(-3x + y + 5) = 0$.
Ein Richtungsvektor von h ist $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *und eine Parameterdarstellung von h lautet*

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

.

b) *Der Schnittpunkt ergibt als Lösung des Gleichungssystemes* $-3x + y + 5 = 0$ *und* $3x + 4y + 20 = 0$. *Die Lösung ist* $x = 0$, $y = -5$ *und der Schnittpunkt ist* $(0, -5)$.
Der Schnittwinkel ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren der Geraden, daher $\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{25}}$, *also* $\varphi = 71,57$ *Grad.*

c) *Die Hesse-Normalform von h lautet* $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 4 = 0$. *Der Abstand von P zu h ist dann* $d = |\frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{4}{5} \cdot 1 + 4| = 2 + 4 = 6$.

d) *Der Flächeninhalt des Dreieckes* $P = (2, 1)$, $Q = (3, 4)$ *und* $O = (0, 0)$ *lautet* $A = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2}(2 \cdot 4 - 1 \cdot 3) = \frac{5}{2}$.

G 8 Es sei E die Ebene durch $P = (1, 2, 2)$, $Q = (1, 1, 1)$, $R = (3, 1, 0)$ und F die Ebene, welche durch die Gleichung $2x + 2y + z = 8$ beschrieben wird.

a) Ermitteln Sie die Hesse-Normalform von E und eine Parameterdarstellung von F.

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden von E und F an.

c) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Ebene F mit der Geraden durch P und Q.

a) *Ein Normalenvektor zu E lautet* $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ *und die Hesse-Normalform* $\frac{1}{3}(-x + 2y - 2z + 1) = 0$.
Zwei Richtungsvektoren von F sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und der Punkt $(2,2,0)$ *liegt in* F, *eine Parameterdarstellung lautet somit*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b) *Zwei Punkte, welche sowohl in E als auch in F liegen, sind* $(0, \frac{5}{2}, 3)$ *und* $(3,1,0)$.
Die Schnittgerade hat daher eine Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

.

c) *Eine Parameterdarstellung der Geraden durch P und Q lautet*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in die Ebenengleichung für F folgt $2 + 2(1+\lambda) + (1+\lambda) = 5 + 3\lambda = 8$ *und damit* $\lambda = 1$. *Der Schnittpunkt ist also* $(1,1,1) + (0,1,1) = (1,2,2)$.

G 9 Gegeben seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie alle Lösungen x des Gleichungssystemes $A_1 x = b$ und des Gleichungssystemes $A_2 x = b$.

Zu A_1: Wir bringen die erweiterte Matrix in Stufenform

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

Die Lösung von $A_1 x = b$ lautet daher $x = (2, 1, -1)$.
Zur Matrix A_2:

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Somit hat $A_2 x = b$ keine Lösung.