Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. E. Hartmann
Susanne Moritz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8./9./11.5.2006

Mathematik II für Chemiker und LaB, Übung 2

Gruppenübung

G 4 Es seien $P = (2, 0)$, $Q = (5, 4)$ sowie $R = (3, 3)$ drei Punkte und g die Gerade durch P und Q.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g an.

b) Liegt der Punkt R auf g?

c) Es sei h die Gerade senkrecht zu g durch den Punkt R. Geben Sie eine Parameterdarstellung von h an.

d) Ermitteln Sie den Schnittpunkt von g und h.

G 5 Es seien $P = (1, 2, 2)$, $Q = (1, 1, 1)$, $R = (3, 1, 0)$ und $S = (4, -1, 2)$ vier Punkte und E die Ebene durch P, Q und R.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an.

b) Liegt der Koordinatenursprung in der Ebene E?

c) Es sei h die Gerade, welche senkrecht auf E steht und den Punkt S enthält. Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden.

d) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Ebenen E mit der Geraden h.

G 6 Ein Dreieck ABC ist gegeben durch die drei Eckpunkte $A = (1, 2)$, $B = (3, 3)$ und $C = (4, 0)$.

a) Zeichnen Sie das Dreieck ABC in ein Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.

c) Ermitteln Sie die Größe des Winkels am Punkt A.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von ABC.

Mathematik II für Chemiker und LaB
Übung 2, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 4 Es seien $P = (2,0)$, $Q = (5,4)$ sowie $R = (3,3)$ drei Punkte und g die Gerade durch P und Q.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g an.

b) Liegt der Punkt R auf g?

c) Es sei h die Gerade senkrecht zu g durch den Punkt R. Geben Sie eine Parameterdarstellung von h an.

d) Ermitteln Sie den Schnittpunkt von g und h.

a) Eine Parameterdarstellung ist

$$\vec{x} = \vec{OP} + \lambda\, \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

b) Wir prüfen, ob das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

eine Lösung besitzt. Aus der ersten Gleichung $3 = 2 + 3\lambda$ *folgt* $\lambda = \frac{1}{3}$, *aus der zweiten* $3 = 4\lambda$ *folgt* $\lambda = \frac{3}{4}$, *ein Widerspruch, also besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, und* R *liegt nicht auf* g.

c) Ein Vektor, welcher senkrecht auf $\vec{PQ}$ *steht ist der Vektor*

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

dies ist ein Richtungsvektor der Geraden h. *Eine Parameterdarstellung von* h *lautet*

$$\vec{x} = \vec{OR} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

d) Wir setzen die Parameterdarstellungen von g *und* h *gleich und erhalten*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 2 + 3\lambda &= 3 - 4\mu \\ 4\lambda &= 3 + 3\mu \end{aligned}$$

mit den Unbekannten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Die Lösung dieses Gleichungssystemes ist* $\lambda = \frac{3}{5}$ *und* $\mu = -\frac{1}{5}$ *und der Schnittpunkt beider Geraden ist der Punkt* $(2,0) + \frac{3}{5}(3,4) = (\frac{19}{5}, \frac{12}{5})$.

G 5 Es seien $P = (1, 2, 2)$, $Q = (1, 1, 1)$, $R = (3, 1, 0)$ und $S = (4, -1, 2)$ vier Punkte und E die Ebene durch P, Q und R.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an.

b) Liegt der Koordinatenursprung in der Ebene E?

c) Es sei h die Gerade, welche senkrecht auf E steht und den Punkt S enthält. Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden.

d) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Ebenen E mit der Geraden h.

a) *Eine Parameterdarstellung ist*

$$\vec{x} = \vec{OP} + \lambda\ \vec{PQ} + \mu\ \vec{QR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ .$$

b) *Wir überprüfen, ob das Gleichungssystem*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung besitzt. Aus der ersten Gleichung folgt $\mu = -\frac{1}{2}$, *aus der zweiten Gleichung folgt* $\lambda = 2$ *und eingesetzt in die dritte Gleichung* $0 = 2 - 2 + \frac{1}{2}$, *ein Widerspruch. Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung, also liegt der Koordinatenursprung nicht auf* E.

c) *Der Richtungsvektor der Gerade* h *steht senkrecht auf beiden Richtungsvektoren der Ebene* E, *ergibt sich also aus dem Kreuzprodukt*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Eine Parameterdarstellung von h *lautet daher*

$$\vec{x} = \vec{OS} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

d) *Wir setzen die Parameterdarstellungen von* h *und* E *gleich und erhalten*

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die Lösung $\lambda = -1$, $\mu = \nu = 1$. *Der Schnittpunkt ist dann* $(4, -1, 2) - (1, -2, 2) = (3, 1, 0)$, *also der Punkt* R.

G 6 Ein Dreieck ABC ist gegeben durch die drei Eckpunkte $A = (1, 2)$, $B = (3, 3)$ und $C = (4, 0)$.

a) Zeichnen Sie das Dreieck ABC in ein Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.

c) Ermitteln Sie die Größe des Winkels am Punkt A.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von ABC.

b) Es ist $a = |\vec{BC}| = |\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}| = \sqrt{10}$, $b = |\vec{AC}| = |\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}| = \sqrt{13}$ *und* $c = |\vec{AB}| = |\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}| = \sqrt{5}$.

c) Es ist

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{AB} | \vec{AC} \rangle}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$$

und daraus $\alpha \approx 60,26$ *Grad.*

d) Der Flächeninhalt F *des Dreiecks berechnet sich über* $F = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{7}{2} = 3,5$.