



Mathematik II für Chemiker und LaB, Übung 1

Gruppenübung

G 1 Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil, den Betrag sowie das Argument von

a) $z_1 = (1 + 2i)^{-1} \cdot \overline{(2 + i)}$

b) $z_2 = 4e^{\frac{1}{6}\pi i} - (3e^{\frac{1}{4}\pi i})^2$

G 2 Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie Ihr Ergebnis in der Form $a + ib$ an.

a) $z^2 = -5 + 12i$

b) $z^2 - 6iz + 7 = 0$

G 3 Lösen Sie das Gleichungssystem.

$$z_1 + 2iz_2 = 3 + i$$

$$iz_1 + 3z_2 = 2 - i$$

Mathematik II für Chemiker und LaB

Übung 1, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 1 Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil, den Betrag sowie das Argument von

a) $z_1 = (1 + 2i)^{-1} \cdot \overline{(2 + i)}$

b) $z_2 = 4e^{\frac{1}{6}\pi i} - (3e^{\frac{1}{4}\pi i})^2$

a)

$$z_1 = (1 + 2i)^{-1} \overline{(2 + i)} = \frac{1}{5}(1 - 2i)(2 - i) = \frac{1}{5}(2 - i - 4i - 2) = -i$$

also $Re(z_1) = 0$, $Im(z_1) = -1$, $|z_1| = 1$ und $arg(z_1) = \frac{3}{2}\pi$

b)

$$z_2 = 4e^{\frac{1}{6}\pi i} - (3e^{\frac{1}{4}\pi i})^2 = 4(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6})) - 9e^{\frac{1}{2}\pi i} = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) - 9i = 2\sqrt{3} - 7i$$

also $Re(z_2) = 2\sqrt{3}$, $Im(z_2) = -7$, $|z_2| = \sqrt{61}$ und $arg(z_2) = \arctan \frac{-7}{2\sqrt{3}}$.

G 2 Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie Ihr Ergebnis in der Form $a + ib$ an.

a) $z^2 = -5 + 12i$

b) $z^2 - 6iz + 7 = 0$

a) Für $w = -5 + 12i$ gilt $|w| = 13$ und $\varphi = arg(w) = \arctan \frac{12}{-5} + \pi$. Die Gleichung $z^2 = w$ besitzt die beiden Lösungen $z_{1,2} = \pm \sqrt{|w|} e^{i\frac{1}{2}\varphi} = \pm \sqrt{13}(\cos(\frac{1}{2}\varphi) + i \sin(\frac{1}{2}\varphi))$ und ausgerechnet $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = -2 - 3i$.

b) Es ist $0 = z^2 - 6iz + 7 = (z - 3i)^2 + 9 + 7 = (z - 3i)^2 + 16$, also $z - 3i = \pm 4i$. Die Lösungen lauten $z_1 = 3i + 4i = 7i$ sowie $z_2 = 3i - 4i = -i$.

G 3 Lösen Sie das Gleichungssystem.

$$z_1 + 2iz_2 = 3 + i$$

$$iz_1 + 3z_2 = 2 - i$$

Wir lösen $z_1 + 2iz_2 = 3 + i$ nach z_1 auf, also $z_1 = 3 + i - 2iz_2$, setzen dies in die zweite Gleichung ein und erhalten $2 - i = i(3 + i - 2iz_2) + 3z_2 = 3i - 1 + 5z_2$ und nach z_2 aufgelöst $z_2 = \frac{1}{5}(3 - 4i)$ und daraus $z_1 = 3 + i - \frac{2}{5}i(3 - 4i) = \frac{1}{5}(7 - i)$.