Hausübung

H 16 Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = 2\sin x\, e^{x+y}\ .$$

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

b) Welche Lösung erfüllt die Anfangsbedingung $y(0) = -1$.

a) *Wir beachten* $y' = 2\sin x\, e^{x+y} = 2\sin x\, e^x\ e^y$ *und rechnen*

$$\int e^{-y} dy = \int 2\sin x e^x dx\ .$$

Im rechten Integral führt mein zweimal eine partielle Integration durch und erhält

$$-e^{-y} = \sin x\ e^x - \cos x\ e^x + c.$$

Nach y *aufgelöst ergibt sich*

$$y = y(x) = -\ln\left(\cos x\ e^x - \sin x\ e^x - c\right)$$

b) *Es ist*

$$-1 = y(0) = -\ln\left(\cos 0\ e^0 - \sin 0\ e^0 - c\right) = -\ln(1-c)$$

Das ist für $c = 1-e$ *erfüllt. Die Lösung lautet also* $y(x) = -\ln\left(\cos x e^x - \sin x e^x - 1 + e\right)$.

H 17 Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = (\cos x)y + x^2 e^{\sin x}.$$

a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an.

c) Welche Lösung der inhomogenen Gleichung genügt der Anfangsbedingung $y(0) = 5$?

a) *Die homogene Gleichung* $y' = (\cos x)y$ *löst man mittels Trennung der Variablen*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (\cos x)y \\ \int \frac{1}{y}\ dy &= \int \cos x\ dx \\ \ln|y| &= \sin(x) + c_1 \\ y(x) &= c\ e^{\sin x} \end{aligned}$$

b) *Ansatz der Variation der Konstanten liefert*

$$\begin{aligned}
y(x) &= c(x)e^{\sin x} \\
y'(x) &= c'(x)e^{\sin x} + c(x)\cos x e^{\sin x} = (\cos x)c(x)e^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} \\
c'(x)e^{\sin x} &= x^2 e^{\sin x} \\
c'(x) &= x^2 \\
c(x) &= \frac{1}{3}x^3 + c
\end{aligned}$$

somit allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(x) = (\frac{1}{3}x^3 + c)\ e^{\sin x}.$$

c) *Es ist*

$$5 = y(0) = c\ e^0 = c$$

Die Lösung lautet also $y(x) = (\frac{1}{3}x^3 + 5)\ e^{\sin x}$.

H 18 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

a) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$

b) $y^{(4)} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = e^{-x}$

c) $y''' - 5y'' + 9y' - 5y = x \sin x$

(H 18) a) Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)$$

und hat die reellen, paarweise verschiedenen Nullstellen

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3.$

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

b) Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda-1)^3(\lambda+2)$$

und hat die Nullstellen $\lambda_{1,2,3} = 1$ und $\lambda_4 = -2$.

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 x^2 e^{x} + c_4 e^{-2x} \qquad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite.

Da -1 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir folgenden Ansatz

$$y_s(x) = a e^{-x}$$

$$y_s'(x) = y_s'''(x) = -a e^{-x}$$

$$y_s''(x) = y_s^{(4)}(x) = a e^{-x}$$

Einsetzen in DGL

$$e^{-x} = a e^{-x} + a e^{-x} - 3a e^{-x} - 5a e^{-x} \cancel{+a} - 2a e^{-x}$$

$$= -8a e^{-x}$$

$\Leftrightarrow \ a = -\frac{1}{8}$, also ist $y_s(x) = -\frac{1}{8} e^{-x}$.

Die allgemeine Lsg der inhomogenen DGL lautet

$$y(x) = -\frac{1}{8} e^{-x} + c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 x^2 e^{x} + c_4 e^{-2x} \qquad c_1 - c_4 \in \mathbb{R}$$

c) Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 9\lambda - 5 = (\lambda-1)(\lambda-2-i)(\lambda-2+i)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2+i,\ \lambda_3 = 2-i.$

Die allgemeine Lsg der homogenen DGL lautet

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} \cos x + c_3 e^{2x} \sin x.$$

Bestimme nun spezielle Lsg der inhomogenen DGL.
Da i keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir folgenden Ansatz

$$y_s(x) = (a_0 + a_1 x) \cos x + (b_0 + b_1 x) \sin x$$

$$y_s'(x) = (a_1 + b_0 + b_1 x) \cos x + (-a_0 - a_1 x + b_1) \sin x$$

$$y_s''(x) = (2b_1 - a_0 - a_1 x) \cos x + (-2a_1 - b_0 - b_1 x) \sin x$$

$$y_s'''(x) = (-3a_1 - b_0 - b_1 x) \cos x + (-3b_1 + a_0 + a_1 x) \sin x$$

Einsetzen in DGL:

$$x \sin x = y_s'''(x) - 5 y_s''(x) + 9 y_s'(x) - 5 y_s(x)$$

$$= (6a_1 + 8b_0 - 10b_1) \cos x + 8 b_1 x \cos x$$
$$+ (-8a_0 + 10a_1 + 6b_1) \sin x - 8 a_1 x \sin x$$

Koeffizientenvergleich liefert folgende Gleichungen

I $\quad 6a_1 + 8b_0 - 10b_1 = 0$

II $\quad 8b_1 = 0 \iff b_1 = 0$

III $\quad -8a_0 + 10a_1 + 6b_1 = 0$

IV $\quad -8a_1 = 1 \iff a_1 = -\frac{1}{8}$

$b_1 = 0$ und $a_1 = -\frac{1}{8}$ einsetzen in I und III

$$8b_0 = -6a_1 + 10b_1 = \frac{6}{8} \iff b_0 = \frac{3}{32}$$

$$8a_0 = 10a_1 + 6b_1 = -\frac{10}{8} \iff a_0 = -\frac{5}{32}$$

also

$$y_s(x) = -\left(\frac{5}{32} + \frac{1}{8}x\right) \cos x + \frac{3}{32} \sin x$$

Die allgemeine Lsg der inhomogenen DGL lautet somit

$$y(x) = y_a(x) + y_s(x)$$
$$= c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} \cos x + c_3 e^{2x} \sin x - \left(\frac{5}{32} + \frac{1}{8}x\right) \cos x + \frac{3}{32} \sin x$$