Hausübung

H 13 Gegeben sind die folgenden Matrizen und Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die inversen Matrizen A^{-1}, B^{-1} und $(AB)^{-1}$.

b) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $Ax = b, Ax = c$ und $ABx = b$ mit Hilfe der in Aufgabenteil a) erzielten Ergebnisse.

siehe hinten

H 14 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

Bestimme das charakteristische Polynom von A.

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(-1-\lambda)(3-\lambda) + 4 + 2 + 2(-1-\lambda) - \lambda - 4(3-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = -(\lambda-2)^2(\lambda+2) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = 2$ und $\lambda_3 = -2$.
<u>Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2} = 2$</u>
Löse Gleichungssystem $(A - \lambda_{1,2}E)\vec{x} = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wähle $x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}$, damit

$$x_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{1}{2}(2x_2 - x_3) = -\frac{1}{2}t$$

Somit eindimensionaler Eigenraum

$$E_{1,2} = \{t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R}\}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_3 = -2$
Löse Gleichungssystem $(A - \lambda_3 E)\vec{x} = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wähle $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$, damit

$$x_2 = 2x_3 = 2t \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{1}{2}(-2x_2 + x_3) = -\frac{3}{2}t$$

Somit Eigenraum

$$E_3 = \{t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R}\}$$

H 15 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & a & b \\ 1 & 4 & b \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ und der Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von a und b ist v ein Eigenvektor der Matrix A?
Berechnen Sie in diesem Fall auch die anderen Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Es ist

$$\begin{pmatrix} 4 & a & b \\ 1 & 4 & b \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 + 3a - 4b \\ 17 - 4b \\ -12 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Anhand der dritten Komponente erkennt man, daß der Eigenwert 3 sein muß. Weiter muß gelten $17 - 4b = 9$, also $b = 2$ und $20 + 3a - 4b = 15$, also $a = 1$ sein.
Die Matrix lautet also

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und das char. Polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = (4 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 1)\,.$$

Eine Nullstelle ist $\lambda = 3$, die restlichen ergeben sich durch Horner-Schema oder Polynomdivision. Weitere Eigenwerte sind also 1 und 4.

<u>*Eigenvektoren zu 1*</u>
Löse Gleichungssystem $(A - 1E)\vec{x} = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wähle $x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}$, *damit*

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2}t \quad \text{und} \quad x_1 = -3x_2 - 2x_3 = \frac{3}{2}t - 2t = -\frac{1}{2}t$$

Somit Eigenraum

$$\{t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R}\}$$

<u>*Eigenvektoren zu 4*</u>
Löse Gleichungssystem $(A - 4E)\vec{x} = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wähle $x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}$, *damit*

$$x_2 = -2x_3 = -2t \quad \text{und} \quad x_1 = -2x_3 = -2t$$

Somit Eigenraum

$$\{t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R}\}$$

H13

a) <u>Inverse von A</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\mathrm{I} \\ -4\mathrm{I} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -19 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & -\frac{11}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-2) \\ :3 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{11}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} -5\mathrm{III} \\ -2\mathrm{III} \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -\frac{32}{3} & \frac{55}{6} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{3} & \frac{19}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{11}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} -3\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{3} & \frac{19}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{11}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Somit

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -22 & 19 & -4 \\ 14 & -11 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Inverse von B</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Somit

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Inverse von AB

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -22 & 19 & -4 \\ 14 & -11 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -12 & 9 & 0 \\ 14 & -11 & 2 \\ -22 & 19 & -4 \end{pmatrix}$$

b) $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\vec{x} = A^{-1} \vec{b} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -22 & 19 & -4 \\ 14 & -11 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 41 \\ -25 \end{pmatrix}$$

$A\vec{x} = \vec{c}$

$$\vec{x} = A^{-1} \vec{c} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -22 & 19 & -4 \\ 14 & -11 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$AB\vec{x} = \vec{b}$

$$\vec{x} = (AB)^{-1} \vec{b} = B^{-1} A^{-1} \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 41 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -25 \\ 41 \end{pmatrix}$$