Hausübung

H 10 Überprüfen Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

lösbar sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls die allgemeine Lösung.

Wir bringen jeweils die erweiterte Matrix mittels Gauß Algorithmus in Stufenform.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen. Wähle $x_3 = t$ und $x_2 = s$ mit $s,\ t \in \mathbb{R}$, damit $x_1 = -2s - 3t$.
Somit allgemeine Lösung

$$x = \begin{pmatrix} -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s,\ t \in \mathbb{R}.$$

Nun zum zweiten Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet daher $x = (-1, 1, 1)$.

H11

a) $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M = M$

b) $M^n = \begin{cases} I & \text{für } n = 3k \\ M & \text{für } n = 3k+1 \\ M^2 & \text{für } n = 3k+2 \end{cases}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$

c) $M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

H12

Die Mischung bestehe aus x_1 kg F_1, x_2 kg F_2, x_3 kg F_3.

a) Es ist zu fordern:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 80 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 122 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 45 \end{array}$$

Mit dem Gauss-Verfahren erhalten wir folgende Zeilenstufenform

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 80 \\ & - & \frac{5}{2}x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & = & 2 \\ & & & & \frac{13}{5}x_3 & = & \frac{39}{5} \end{array}$$

und damit als Ergebnis: $x_1 = 37, x_2 = 1, x_3 = 3.$

b) Das Gleichungssystem der Aufgabe a) hat in diesem Fall die rechte Seite $(90, 120, 50)^T$. *Die Zeilenstufenform sieht wie folgt aus:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 90 \\ & - & \frac{5}{2}x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & = & -15 \\ & & & & \frac{13}{5}x_3 & = & -16 \end{array}$$

Als Lösung ergibt sich

$$x_2 = \frac{30}{13},\ x_1 = \frac{580}{13},\ x_3 = -\frac{80}{13} < 0.$$

Somit ist in Mischfutter der geforderten Zusammensetzung mit F_1, F_2, F_3 nicht zu realisieren.