Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. E. Hartmann
Susanne Moritz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

15./16./18.5.2006

Mathematik II für Chemiker und LaB, Übung 3

Gruppenübung

G 7 Es sei g die Gerade durch $P = (2, 1)$ und $Q = (3, 4)$ und h die Gerade, welche durch die Gleichung $3x + 4y + 20 = 0$ beschrieben wird.

a) Ermitteln Sie die Hesse-Normalform von g und eine Parameterdarstellung von h.

b) Berechnen Sie Schnittpunkt sowie Schnittwinkel der Geraden g und h.

c) Berechnen Sie den Abstand von P zu h.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten P, Q und dem Koordinatenursprung.

G 8 Es sei E die Ebene durch $P = (1, 2, 2)$, $Q = (1, 1, 1)$, $R = (3, 1, 0)$ und F die Ebene, welche durch die Gleichung $2x + 2y + z = 8$ beschrieben wird.

a) Ermitteln Sie die Hesse-Normalform von E und eine Parameterdarstellung von F.

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden von E und F an.

c) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Ebene F mit der Geraden durch P und Q.

G 9 Gegeben seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Ermitteln Sie alle Lösungen x des Gleichungssystemes $A_1 x = b$ und des Gleichungssystemes $A_2 x = b$.

Hausübung

H 7 Gegeben sind die Punkte $A = (1,2)$, $B = (6,-1)$ und $C = (\frac{5}{2}, 7)$ und die Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ mit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei g die Gerade durch die Punkte A und B und h die Gerade durch den Punkt C in Richtung w.

a) Ermitteln Sie die Hesse-Normalform von g und h.

b) Berechnen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel der Geraden g und h.

c) Geben Sie alle Punkte auf der Geraden g an, welche von der Geraden h den Abstand $\sqrt{34}$ haben.

d) Mittels Addition des Vektors $\vec{v}$ zum Punkt C erhält man den Punkt D. Betrachten Sie nun das Viereck $ABCD$. Welche speziellen Eigenschaften hat es?

H 8 Gegeben seien die Ebenen

$$E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$F : 2x + y - 3z = 3$$

a) Ermitteln Sie die Hesse-Normalform von E und eine Parameterdarstellung von F.

b) Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Ebenen?

c) Berechnen Sie die Schnittgerade.

loes

H 9 Gegeben seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & 8 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie alle Lösungen x des Gleichungssystemes $A_1 x = b$ und des Gleichungssystemes $A_2 x = b$.

Mathematik II für Chemiker und LaB
Übung 3, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 7 Es sei g die Gerade durch $P = (2, 1)$ und $Q = (3, 4)$ und h die Gerade, welche durch die Gleichung $3x + 4y + 20 = 0$ beschrieben wird.

a) Ermitteln Sie die Hesse-Normalform von g und eine Parameterdarstellung von h.

b) Berechnen Sie Schnittpunkt sowie Schnittwinkel der Geraden g und h.

c) Berechnen Sie den Abstand von P zu h.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten P, Q und dem Koordinatenursprung.

a) *Ein Normalenvektor für g ist*

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Hesse-Normalform $\frac{1}{\sqrt{10}}(-3x + y + 5) = 0$.
Ein Richtungsvektor von h ist $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *und eine Parameterdarstellung von h lautet*

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

.

b) *Der Schnittpunkt ergibt als Lösung des Gleichungssystemes* $-3x + y + 5 = 0$ *und* $3x + 4y + 20 = 0$. *Die Lösung ist* $x = 0$, $y = -5$ *und der Schnittpunkt ist* $(0, -5)$.
Der Schnittwinkel ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren der Geraden, daher $\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{25}}$, *also* $\varphi = 71,57$ *Grad.*

c) *Die Hesse-Normalform von h lautet* $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 4 = 0$. *Der Abstand von P zu h ist dann* $d = |\frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{4}{5} \cdot 1 + 4| = 2 + 4 = 6$.

d) *Der Flächeninhalt des Dreieckes* $P = (2, 1)$, $Q = (3, 4)$ *und* $O = (0, 0)$ *lautet* $A = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2}(2 \cdot 4 - 1 \cdot 3) = \frac{5}{2}$.

G 8 Es sei E die Ebene durch $P = (1, 2, 2)$, $Q = (1, 1, 1)$, $R = (3, 1, 0)$ und F die Ebene, welche durch die Gleichung $2x + 2y + z = 8$ beschrieben wird.

a) Ermitteln Sie die Hesse-Normalform von E und eine Parameterdarstellung von F.

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden von E und F an.

c) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Ebene F mit der Geraden durch P und Q.

a) *Ein Normalenvektor zu E lautet* $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ *und die Hesse-Normalform* $\frac{1}{3}(-x + 2y - 2z + 1) = 0$.
Zwei Richtungsvektoren von F sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und der Punkt $(2, 2, 0)$ *liegt in F, eine Parameterdarstellung lautet somit*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b) *Zwei Punkte, welche sowohl in E als auch in F liegen, sind* $(0, \frac{5}{2}, 3)$ *und* $(3, 1, 0)$.
Die Schnittgerade hat daher eine Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

.

c) *Eine Parameterdarstellung der Geraden durch P und Q lautet*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in die Ebenengleichung für F folgt $2 + 2(1+\lambda) + (1+\lambda) = 5 + 3\lambda = 8$ *und damit* $\lambda = 1$. *Der Schnittpunkt ist also* $(1, 1, 1) + (0, 1, 1) = (1, 2, 2)$.

G 9 Gegeben seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie alle Lösungen x des Gleichungssystemes $A_1 x = b$ und des Gleichungssystemes $A_2 x = b$.

Zu A_1: Wir bringen die erweiterte Matrix in Stufenform

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

Die Lösung von $A_1 x = b$ lautet daher $x = (2, 1, -1)$.
Zur Matrix A_2:

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Somit hat $A_2 x = b$ keine Lösung.

Hausübung

H 7 Gegeben sind die Punkte $A = (1, 2)$, $B = (6, -1)$ und $C = (\frac{5}{2}, 7)$ und die Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ mit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei g die Gerade durch die Punkte A und B und h die Gerade durch den Punkt C in Richtung w.

a) Ermitteln Sie die Hesse-Normalform von g und h.

b) Berechnen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel der Geraden g und h.

c) Geben Sie alle Punkte auf der Geraden g an, welche von der Geraden h den Abstand $\sqrt{34}$ haben.

d) Mittels Addition des Vektors $\vec{v}$ zum Punkt C erhält man den Punkt D. Betrachten Sie nun das Viereck $ABCD$. Welche speziellen Eigenschaften hat es?

a) *Ein Normalenvektor für g ist*

$$\frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und die Hesse-Normalform $\frac{1}{\sqrt{34}}(3x + 5y - 13) = 0$.
Ein Normalenvektor von h ist

$$\frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und die Hesse-Normalform von h lautet $\frac{1}{\sqrt{34}}(5x - 3y + \frac{17}{2}) = 0$.

b) *Der Schnittpunkt ergibt sich als Lösung des Gleichungssystemes* $3x+5y-13 = 0$ *und* $5x - 3y + \frac{17}{2} = 0$. *Die Lösung ist* $x = -\frac{7}{68}$, $y = \frac{181}{68}$ *und der Schnittpunkt ist* $(-\frac{7}{68}, \frac{181}{68})$.
Der Schnittwinkel ist der Winkel zwischen den Normalenvektoren der Geraden, daher $\cos\varphi = 0$, *also* $\varphi = 90$ *Grad.*

c) *Eine Parameterform von g lautet*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 5\lambda \\ 2 - 3\lambda \end{pmatrix}.$$

Der Abstand d eines Punktes auf g zur Geraden h berechnet sich durch

$$d = |\frac{1}{\sqrt{34}}(5(1 + 5\lambda) - 3(2 - 3\lambda) + \frac{17}{2})| = |\frac{1}{\sqrt{34}}(\frac{15}{2} + 34\lambda)|.$$

Für $d = \sqrt{34}$ *muß dann* $|\frac{15}{2} + 34\lambda| = 34$ *gelten, also*

$$\lambda = -\frac{15}{68} \pm 1.$$

Es gibt also zwei Punkte, welche Abstand $\sqrt{34}$ *haben, nämlich* $(1, 2)+\frac{53}{68}(5, -3) = \frac{1}{68}(333, -23)$ *und* $(1, 2) - \frac{83}{68}(5, -3) = \frac{1}{68}(-347, 385)$.

d) Es gilt

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\vec{AB},$$

d.h. $\vec{v}$ *und* $\vec{AB}$ *sind linear abhängig. Also sind die Seiten* $\vec{AB}$ *und* $\vec{CD}$ *des Vierecks parallel. Somit ist das Viereck* $ABCD$ *ein Trapez.*

H 8 Gegeben seien die Ebenen

$$E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$F : 2x + y - 3z = 3$$

a) Ermitteln Sie die Hesse-Normalform von E und eine Parameterdarstellung von F.

b) Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Ebenen?

c) Berechnen Sie die Schnittgerade.

a) Ein Normalenvektor von E *lautet*

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Hesse-Normalform von E *lautet daher* $\frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z - 1) = 0$.
Zwei Richtungsvektoren von F *sind*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der Punkt $(1, 1, 0)$ *liegt in* F, *eine Parameterdarstellung lautet somit*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b) Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist definiert als der Winkel zwischen ihren Normalenvektoren. Somit $\cos\varphi = \frac{0}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$, *also* $\varphi = 90$ *Grad.*

c) Wir setzen die Parameterdarstellung von E *in die Gleichung von* F *ein*

$$3 = 2x + y - 3z = 2(1 - \lambda - \mu) + \lambda - 3\mu = 2 - \lambda - 5\mu.$$

Einsetzen von $\lambda = -5\mu - 1$ *in die Parameterdarstellung von* E *liefert uns eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-5\mu - 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

loes

H 9 Gegeben seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & 8 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Ermitteln Sie alle Lösungen x des Gleichungssystemes $A_1 x = b$ und des Gleichungssystemes $A_2 x = b$.

Zu A_1: Wir bringen die erweiterte Matrix in Stufenform

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 10 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 8 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem $A_1 x = b$ besitzt unendlich viele Lösungen. Wähle $x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}$, dann

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 - 2x_3 = 1 - 2t \\ x_1 &= -3x_2 - 2x_3 = -3 + 4t \end{aligned}$$

Somit allgemeine Lösung des Gleichungssystem $A_1 x = b$

$$x = \begin{pmatrix} -3 + 4t \\ 1 - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zur Matrix A_2:

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit hat $A_2 x = b$ genau eine Lösung, und diese lautet $x = (2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$